НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

ФИЗИКА

Элементы классической и релятивистской механики

Учебное пособие

Новосибирск 2012

УДК 531 + 530.12 (075)
ББК 22.2, Я 73
Э 456

Кафедра теоретической и прикладной физики

Составители: канд. техн. наук, доц. *В. Я. Чечуев;*
канд. техн. наук, доц. *С. В. Викулов; И. М. Дзю*

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *М. П. Синюков* (НГАВТ);
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. И. Сигимов* (НГАВТ)

Элементы классической и релятивистской механики: учеб. пособие / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т; сост.: В. Я. Чечуев, С. В. Викулов, И. М. Дзю. – Новосибирск: Изд-во НГАУ, 2012. – 123 с.

Учебное пособие содержит изучаемый в курсе общей физики материал классической механики и специальной теории относительности.

Предназначено для студентов дневной и заочной форм обучения всех направлений подготовки, реализуемых в НГАУ.

Утверждено и рекомендовано к изданию методическим советом Инженерного института (протокол № 3 от 27 марта 2012 г.).

ВВЕДЕНИЕ

Механика – это раздел физики, в котором изучается движение тел в пространстве и времени.

Положение тела в пространстве может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Это же относится и к движению тела. Тело (или система неподвижных относительно друг друга тел), которое служит для определения положения интересующего нас тела, называют *телом отсчёта*.

Практически для описания движения с телом отсчёта связывают какую-нибудь систему координат, например декартову. Координаты тела позволяют установить его положение в пространстве. Так как движение происходит не только в пространстве, но и во времени, то для описания движения необходимо отсчитывать также и время. Это делается с помощью часов того или иного типа.

Совокупность тела отсчёта, связанных с ним координат и синхронизированных между собой часов образует систему отсчёта.

Опыт показывает, что пока скорости тел малы по сравнению со скоростью света c ($c \simeq 3 \cdot 10^8$ м/с), линейные масштабы и промежутки времени остаются *неизменными* при переходе от одной системы отсчёта к другой.

Механику, изучающую движение тел именно в этих случаях, называют *ньютоновской*.

При переходе же к скоростям, сравнимым со скоростью света, обнаруживается, что линейные масштабы и промежутки времени уже зависят от выбора системы отсчёта и в разных системах отсчёта будут разными. Механику, основанную на этих представлениях, называют *релятивистской*. Релятивистская механика является более общей и в частном случае малых скоростей переходит в ньютоновскую (классическую).

Учитывая, что движения реальных тел очень сложны, в ньютоновской механике изучают движение двух абстракций: материальной точки и абсолютно твёрдого тела.

Материальная точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Абсолютно твёрдое тело, или, короче, твёрдое тело – это тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Изучение движений привело:

1) к установлению динамических законов (при малых скоростях – законов Ньютона);

2) к обнаружению законов сохранения энергии, импульса и момента импульса.

Механика состоит из двух разделов: кинематики и динамики.

1. КИНЕМАТИКА

Кинематика – это раздел механики, где изучаются способы описания движений независимо от причин, обусловливающих эти движения.

1.1. Кинематика материальной точки

Существуют три способа описания движений точки. Мы рассмотрим два из них: векторный и координатный.

Векторный способ. В этом способе положение интересующей нас материальной точки A задают радиусом-вектором $\vec{r}$, проведённым из некоторой неподвижной точки O выбранной системы отсчёта в точку A (рис. 1.1).

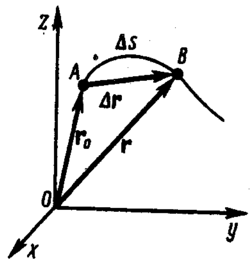


Рис. 1.1

При движении материальной точки A её радиус-вектор меняется в общем случае как по модулю, так и по направлению, т.е. радиус-вектор $\vec{r}$ зависит от времени t. Геометрическое место концов радиуса-вектора $\vec{r}$ называют *траекторией* точки A. Длина участка траектории 1–2, пройденного материальной точкой, называется *длиной пути* Δs, являющейся скалярной функцией времени $\Delta s = \Delta s(t)$. Вектор $\Delta\vec{r}$ называется *вектором перемещения*. Он представляет собой приращение радиуса вектора $\vec{r}$ за время перемещения Δt: $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Для характеристики быстроты движения и его направления вводится векторная величина – скорость.

Вектором средней скорости $\langle \vec{v} \rangle$ называется отношение вектора перемещения к промежутку времени Δt:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.1}$$

Вектор $\langle \vec{v} \rangle$ совпадает по направлению с $\Delta \vec{r}$.

При неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется *мгновенной скоростью* $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.2}$$

Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис. 1.2).

Модуль мгновенной скорости определяется соотношением

$$v = |\vec{v}| = \left| \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{1.3}$$

При *неравномерном движении* модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В этом случае пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ – средней скоростью неравномерного движения:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Ускорение и его составляющие. В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является *ускорение*.

Рассмотрим плоское движение, т.е. движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости.

Пусть вектор $\vec{v}$ задаёт скорость точки A в момент времени t. За время Δt движущаяся точка перешла в положение B и приобрела скорость, отличную от $\vec{v}$ как по модулю, так и по направлению и равную $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Перенесём вектор $\vec{v}_1$ в точку A и найдём Δv (см. рис. 1.2).

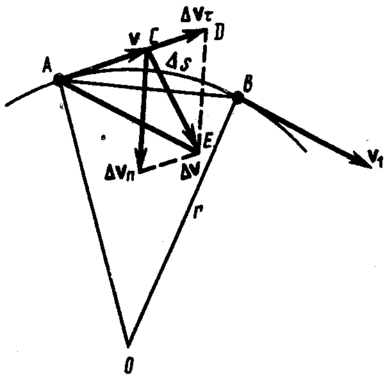


Рис. 1.2

Средним ускорением неравномерного движения в интервале от t до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Мгновенным ускорением $\vec{a}$ материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{1.6}$$

Таким образом, ускорение есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

Разложим вектор $\Delta\vec{v}$ на две составляющие. Для этого из точки A (см. рис. 1.2) по направлению скорости $\vec{v}$ отложим вектор $AД$, по модулю равный $\vec{v}_1$. Очевидно, что вектор $\vec{СД}$, равный $\Delta\vec{v}_\tau$, определяет изменение скорости за время Δt по модулю $\Delta v_\tau = v_1 - v$. Вторая же составляющая $\Delta\vec{v}_n$ вектора $\Delta\vec{v}$ характеризует изменение скорости за время Δt по направлению.

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \qquad (1.7)$$

т.е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдём вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка *B* достаточно близка к точке *A*, поэтому Δs можно считать дугой окружности некоторого радиуса *r*, мало отличающейся от хорды *AB*. Тогда из подобия треугольников *AOB* и *EAД* следует $\Delta v / AB = v_1 / r$, но так как $AB = v \cdot \Delta t$, то

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v \cdot v_1}{r}.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ получим $\vec{v}_1 \to \vec{v}$. Поскольку $\vec{v}_1 \to \vec{v}$, угол *EAД* стремится к нулю, а так как треугольник *EAД* равнобедренный, то угол между $\vec{v}$ и $\Delta\vec{v}_n$ стремится к прямому. Следовательно, при $\Delta t \to 0$ векторы $\Delta\vec{v}_n$ и $\vec{v}$ оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор $\Delta\vec{v}_n$ направлен к центру её кривизны. Вторая составляющая ускорения, равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}, \qquad (1.8)$$

называется нормальной составляющей ускорения и направлена по нормали к траектории к центру её кривизны.

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих (рис. 1.3):

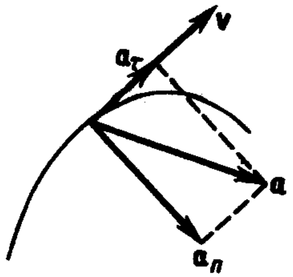


Рис. 1.3

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \qquad (1.9)$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (1.10)$$

Таким образом, зная зависимость $\vec{r}(t)$, можно, используя вышеприведённые соотношения, найти скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ материальной точки в каждый момент времени. Это прямая задача кинематики.

Возникает и обратная задача: можно ли найти $\vec{v}(t)$ и $\vec{r}(t)$, зная зависимость от времени ускорения $\vec{a}(t)$?

Оказывается, для получения однозначного решения этой задачи одной зависимости $\vec{a}(t)$ недостаточно, необходимо ещё знать так называемые начальные условия, а именно скорость $\vec{v}_0$ и радиус-вектор $\vec{r}_0$ точки в некоторый начальный момент $t = 0$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим простейший случай, когда в процессе движения ускорение точки $\vec{a} = \text{const}$.

Сначала определим скорость точки $\vec{v}(t)$. Согласно (1.6), за промежуток времени dt элементарное приращение скорости $d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt$, найдём приращение вектора скорости за это время:

$$\Delta\vec{v} = \int_0^t \vec{a}dt = \vec{a}t.$$

Но величина $\Delta\vec{v}$ – это ещё не искомая скорость $\vec{v}$. Чтобы найти $\vec{v}$, необходимо знать скорость $\vec{v}_0$ в начальный момент времени. Тогда $\vec{v} = \vec{v}_0 + \Delta\vec{v}$, или

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \qquad (1.11)$$

Аналогично решается вопрос и о радиусе-векторе $\vec{r}(t)$ точки. Согласно (1.2), за промежуток времени элементарное приращение радиуса-вектора $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$. Интегрируя это выражение с учётом (1.11), определим приращение радиуса-вектора за время от $t = 0$ до t:

$$\Delta\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) \cdot dt = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Для нахождения самого радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ необходимо знать ещё положение точки $\vec{r}_0$ в начальный момент времени. Тогда $\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}$, или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.$$

Координатный способ. В этом способе с телом отсчёта жёстко связывают определённую систему координат. На рис. 1.1 с телом отсчёта связана декартова система координат *x, y, z*.

Запишем проекции на оси *x, y, z* радиуса-вектора $\vec{r}(t)$, характеризующего положение интересующей нас точки *A* относительно начала координат О в момент *t*:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t).$$

Зная зависимости этих координат от времени – закон движения точки, можно найти положение точки в каждый момент времени, её скорость и ускорение. Действительно, спроектировав (1.2) и (1.6), например, на ось *x*, получим формулы, определяющие проекции векторов скорости и ускорения на эту ось:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \tag{1.12}$$

где dx – проекция вектора перемещения $d\vec{r}$ на ось x;

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \tag{1.13}$$

где dv_x – проекция вектора приращения скорости $d\vec{v}$ на ось x. Аналогичные соотношения получаются для y- и z-проекций соответствующих векторов. Из этих формул видно, что проекции векторов скорости и ускорения равны соответственно первой и второй производным координат по времени. Зная проекции векторов, можно найти модуль и направление векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$ в любой момент времени. Например, модуль вектора скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

направление же вектора $\vec{v}$ задаётся направляющими косинусами

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}; \cos\beta = \frac{v_y}{v}; \cos\gamma = \frac{v_z}{v},$$

где α, β, γ – углы между вектором $\vec{v}$ и осями x, y, z соответственно. Аналогичными формулами определяются модуль и направление вектора ускорения.

Кроме этого, можно решить и ряд других вопросов: найти траекторию точки, зависимость пройденного ею пути от времени, зависимость скорости от положения точки и т. д.

Решение обратной задачи – нахождение скорости и закона движения точки по заданному ускорению – проводится, как и в векторном способе, путём интегрирования (в данном случае проекций ускорения по времени), причём задача и здесь имеет однозначное решение, если кроме ускорения заданы ещё и начальные условия: проекции скорости и координаты точки в начальный момент времени.

1.2. Кинематика твёрдого тела

Различают пять видов движения твёрдого тела. При этом основными являются поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси. Остальные могут быть получены как суперпозиция этих движений.

Поступательное движение. Это такое движение твёрдого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, всё время остаётся параллельной своему начальному положению. Например, машина, едущая по прямому участку пути; кабина колеса обозрения и т. д.

При поступательном движении все точки твёрдого тела совершают за один и тот же промежуток времени равные перемещения. Поэтому скорости и ускорения всех точек в данный момент времени *одинаковы*. Это позволяет свести изучение поступательного движения твёрдого тела к изучению движения отдельной точки тела, т. е. к задаче *кинематики точки*.

Таким образом, поступательное движение твёрдого тела может быть полностью описано, если известны зависимость от времени радиуса-вектора любой точки этого тела, положение и его скорость в начальный момент времени.

Вращение вокруг неподвижной оси. Пусть твёрдое тело вращается вокруг неподвижной оси OO'. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения.

Изменение положения тела за время dt можно характеризовать углом поворота некоторой точки A, движущейся по окружности радиуса R (рис. 1.4).

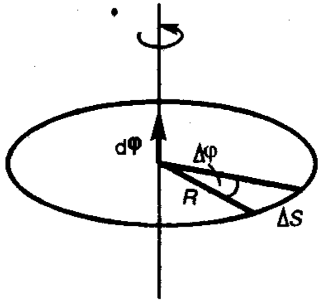


Рис. 1.4

Угол поворота принято характеризовать *вектором* $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется *правилу правого винта*.

Векторы, направления которых определяются направлением вращения, называются псевдовекторами или *аксиальными векторами*. Эти векторы не имеют определённых точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения. $d\vec{\varphi}$ – аксиальный вектор. Аксиальными являются также векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.14}$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен так же, как вектор $d\vec{\varphi}$, вдоль оси вращения по правилу правого винта (рис. 1.5). Размерность угловой скорости $\dim\omega = T^{-1}$, где T – время, а её единица – радиан в секунду (рад/с).

Из рис. 1.5 следует, что линейная скорость точки

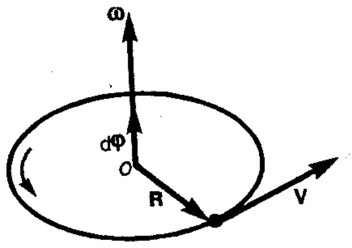


Рис. 1.5

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega\,. \qquad (1.15)$$

Более строго (1.15) нужно записать как векторное произведение:

$$\vec{v} = \left[\vec{\omega} \cdot \vec{R}\right]. \qquad (1.16)$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен $\omega R \cdot \sin\left(\vec{\omega} \wedge \vec{R}\right)$, а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$.

Если $\omega = \mathrm{const}$, то вращение равномерное и его можно характеризовать периодом вращения T – временем, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π. Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то $\omega = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности в единицу времени, называется *частотой вращения*:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi},$$

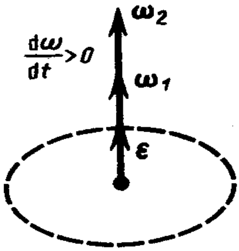
откуда

$$\omega = 2\pi n\,. \qquad (1.17)$$

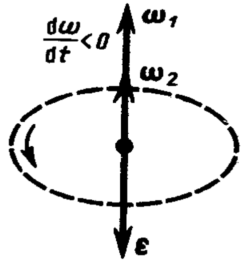
Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.18}$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения. Причём при ускоренном движении $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рис. 1.6 а), при замедленном – противоположен ему (см. рис. 1.6 б).



а)



б)

Рис. 1.6

Установим связь между полным ускорением *a* некоторой точки вращающегося тела и угловыми величинами. Для этого продифференцируем (1.16) по времени:

$$\vec{a} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\varepsilon}\ \vec{r}] + [\vec{\omega}\ \vec{v}] = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n .$$

Здесь
$$a_\tau = \varepsilon \cdot R,\ a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.19}$$

Таким образом, связь между линейными (длина пути *s*, пройденного точкой по дуге окружности радиуса *R*, линейная скорость *v,* тангенциальное ускорение a_τ, нормальное ускорение a_n) и угловыми величинами (угол поворота φ, угловая скорость ω, угловое ускорение ε) выражается следующими формулами:

$$s = R \cdot \varphi;\; v = \omega \cdot R;\; a_\tau = \varepsilon \cdot R;\; a_n = \omega^2 \cdot R = \frac{v^2}{R}.$$

В случае равнопеременного движения по окружности $(\varepsilon = \mathrm{const})$

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

где ω_0 – начальная угловая скорость.

2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

2.1. Инерциальные системы отсчёта

В кинематике, где речь идёт лишь об описании движений и не затрагивается вопрос о причинах, вызывающих эти движения, никакой принципиальной разницы между различными системами отсчёта нет.

Совершенно иначе дело обстоит в динамике – при изучении законов движения. В принципе можно взять любую из бесчисленного множества систем отсчёта. Однако законы механики в разных системах отсчёта имеют различный вид, и может оказаться, что в произвольной системе отсчёта законы даже совсем простых явлений будут весьма сложными. Естественно возникает задача отыскания такой системы отсчёта, в которой законы механики были бы возможно более простыми.

Для решения этой задачи рассмотрим ускорение материальной точки относительно некоторой произвольной системы отсчёта. Опыт показывает, что причиной ускорения могут быть как действие на данную точку каких-то определённых тел, так и свойства самой системы отсчёта.

Можно, однако, *предположить*, что существует такая система отсчёта, в которой ускорение материальной точки целиком обусловлено только взаимодействием с другими телами. Свободная материальная точка, не подверженная действию никаких других тел, движется относительно такой системы отсчёта прямолинейно и равномерно, или, как говорят, по инерции. Такую систему отсчёта называют *инерциальной*.

Как показали наблюдения над ускорениями планет, инерциальной является гелиоцентрическая система отсчёта.

В ней начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определённых звёзд. В настоящее время инерциальность гелиоцентрической системы отсчёта подтверждается всей совокупностью опытов.

Любая другая система отсчёта, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, является также инерциальной.

Таким образом, существует не одна, а бесчисленное множество инерциальных систем отсчёта. Системы отсчёта, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, называются *неинерциальными*.

Важной особенностью инерциальных систем отсчёта является то, что по отношению к ним пространство и время обладают определёнными свойствами симметрии. А именно: опыт убеждает, что в этих системах отсчёта пространство однородно и изотропно, а время однородно.

Однородность и изотропность пространства заключается в том, что свойства пространства одинаковы в различных точках (однородность), а в каждой точке одинаковы во всех направлениях (изотропность).

Однородность времени заключается в том, что протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное время их наблюдения одинаково. Иначе говоря, различные моменты времени эквивалентны друг другу по своим физическим свойствам.

Отметим, что по отношению к неинерциальным системам отсчёта пространство является неоднородным и неизотропным. Время в этих системах отсчёта также является неоднородным, т. е. его различные моменты будут не эквивалентны друг другу.

Принцип относительности Галилея. Для инерциальных систем отсчёта справедлив принцип относительности, согласно которому все инерциальные системы по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу. Это значит, что никакими механическими опытами, проводимыми «внутри» данной инерциальной системы, нельзя установить, покоится эта система или движется. Во всех инерциальных системах отсчёта свойства пространства и времени одинаковы, одинаковы также и все законы механики. Данное утверждение составляет содержание принципа относительности Галилея.

Вышесказанное свидетельствует об исключительности свойств инерциальных систем отсчёта, в силу которых именно эти системы должны, как правило, использоваться при изучении механических явлений.

Преобразования Галилея. Найдём формулы преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Пусть инерциальная система K' движется со скоростью $\vec{v}$ относительно другой инерциальной системы K. Выберем оси координат x', y', z' K'-системы параллельно соответствующим осям x, y, z K-системы так, чтобы оси x' и x совпадали между собой и были направлены вдоль вектора $\vec{v}$ (рис. 2.1). Взяв за начало отсчёта времени момент, когда начала координат O' и O совпадали, запишем соотношение между радиусами-векторами $\vec{r}'$ и $\vec{r}$ одной и той же точки A в K'- и K-системах:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} \cdot t \tag{2.1}$$

и, кроме того

$$t' = t \, . \tag{2.2}$$

Соотношения (2.1) и (2.2) представляют собой преобразования Галилея. В координатах эти преобразования имеют вид:

$$x' = x - vt, \; y' = y, \; z' = z, \; t' = t \, . \tag{2.3}$$

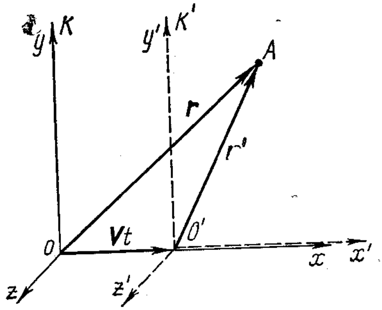


Рис. 2.1

Продифференцировав (2.1) по времени, найдём классический закон преобразования скорости точки при переходе одной инерциальной системы отсчёта к другой:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} . \qquad (2.4)$$

Дифференцируя (3.4) по времени, получим:

$$\vec{a}' = \vec{a} , \qquad (2.5)$$

т.е. ускорение точки одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.

2.2. Законы Ньютона

Динамика базируется на законах Ньютона, которые являются результатом обобщения экспериментальных данных.

Первый закон Ньютона. Материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения по инерции до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

Во Вселенной практически невозможно найти тело, не испытывающее внешнего воздействия, а значит, невозможно непосредственно экспериментально подтвердить первый закон Ньютона. Однако с его помощью можно объяснить ряд опытов, что является косвенным подтверждением этого закона. К примеру, монета, лежащая на пластинке плексигласа, закрывающей горлышко бутылки, при резком щелчке по плексигласу в горизонтальной плоскости падает в бутылку, пассажиры автомобиля при резком торможении продолжают движение вперёд и т. д.

Таким образом, из первого закона Ньютона следует, что тело может двигаться как при наличии, так и при отсутствии внешнего воздействия. Следовательно, скорость сама по себе не показывает, действуют на тело внешние силы или нет. Ответ на фундаментальный вопрос, какая физическая величина является однозначным показателем наличия внешнего воздействия, был дан Ньютоном во втором законе.

Второй закон Ньютона. Тело движется прямолинейно и равномерно по абсолютно гладкой поверхности лишь в том случае, когда отсутствует внешнее воздействие. Если подтолкнуть тело в направлении движения, его скорость увеличится. Воздействие на тело в направлении, противоположном его движению, уменьшает скорость тела. Следовательно, внешнее воздействие изменяет скорость. Таким образом, не скорость, а *ускорение* является показателем наличия или отсутствия внешнего воздействия.

Степень воздействия характеризуют силой $\vec{F}$. Сила – векторная величина. В результате действия силы тело приобретает ускорение или изменяет форму и размеры.

Физическая природа взаимодействий может быть различной. Существуют четыре фундаментальных взаимодействия: сильное, электромагнитное, слабое и гравитационное. Силы в механике Ньютона имеют гравитационную и электромагнитную природу. Однако силы различной природы можно измерять в одних и тех же единицах с помощью одних и тех же эталонов.

Связь между ускорением и силой определяется вторым законом Ньютона: произведение массы материальной точки (тела) m на её ускорение равно действующей на него силе $\vec{F}$:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (2.6)$$

Если на тело действует несколько сил, то равнодействующая равна

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots \qquad (2.7)$$

Единицей силы в СИ является ньютон (Н). Ньютон – это такая сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с^2.

Масса тела – физическая величина, являющаяся мерой инертности тела. Единицей массы в СИ является килограмм.

Инертность – физическое свойство, заключающееся в том, что любое тело оказывает сопротивление изменению его скорости (как по модулю, так и по направлению). При прочих равных условиях, чем больше масса тела, тем труднее его сдвинуть.

Отметим, что уравнение (2.6) получает конкретное содержание только после того, как установлен вид зависимости силы от определяющих её величин (например, $F = -kx$, где k – коэффициент упругости).

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (2.6) её можно внести под знак производной:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}). \qquad (2.8)$$

Векторная величина

$$\vec{p} = m\vec{v}, \qquad (2.9)$$

численно равная произведению массы материальной точки на её скорость и имеющая направление скорости, называется *импульсом* этой материальной точки.

Подставляя (2.9) в (2.8), получим:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \qquad (2.10)$$

Это выражение – более общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе. Выражение (2.10) называется уравнением движения материальной точки.

Третий закон Ньютона. Всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \qquad (2.11)$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; $\vec{F}_{21}$ – сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики отдельной материальной точки к динамике системы материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам попарного взаимодействия между материальными точками.

В третьем законе Ньютона предполагается, что обе силы равны по модулю в любой момент времени независимо от движения точек. Это утверждение соответствует ньютоновскому представлению о мгновенном распространении взаимодействий – предположению, которое носит название *принципа дальнодействия*. Согласно этому принципу, взаимодействие между телами распространяется в пространстве с бесконечно большой скоростью.

В действительности это не так – существует конечная максимальная скорость распространения взаимодействий, которая равна скорости света в вакууме. Поэтому третий закон Ньютона (а также и второй) имеет определённые пределы применимости. Однако при скоростях тел, значительно меньших скорости света, с которыми имеет дело ньютоновская механика, оба закона выполняются с очень большой точностью. Свидетельством этому являются хотя бы расчёты траекторий планет и искусственных спутников, которые проводятся с «астрономической» точностью именно с помощью законов Ньютона.

Законы Ньютона выполняются только в *инерциальных системах отсчёта*.

Земля же движется относительно Солнца и звёзд по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчёта, связанная с земной поверхностью, движется с ускорением относительно гелиоцентрической системы отсчёта и не является инерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большом числе случаев её можно считать практически инерциальной. Но иногда неинерциальность системы отсчёта, связанной с Землёй, оказывает существенное влияние на характер рассматриваемых относительно неё механических явлений. Некоторые из таких случаев мы рассмотрим впоследствии.

В соответствии с принципом относительности Галилея законы механики должны быть одинаковыми во всех инерциальных системах отсчёта. Это значит, в частности, что уравнение (2.6) будет иметь один и тот же вид в любой инерциальной системе отсчёта. Действительно, масса m материальной точки как таковой не зависит от скорости, т. е. одинакова во всех системах отсчёта. Кроме того, для инерциальных систем отсчёта одинаковым является и ускорение $\vec{a}$ точки (2.5). Сила $\vec{F}$ тоже не зависит от выбора системы отсчёта, поскольку она определяется только взаимным расположением и скоростью материальной точки относительно окружающих тел, а эти величины, согласно релятивистской кинематике, в разных инерциальных системах отсчёта одинаковы.

Таким образом, все три величины $m, \vec{a}$ и $\vec{F}$, входящие в уравнение (2.6), не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, а следовательно, не меняется и само уравнение (2.6). Другими словами, уравнение $\vec{F} = m\vec{a}$ инвариантно относительно преобразований Галилея.

Законы Ньютона являются основными законами механики. Они позволяют, по крайней мере в принципе, решить любую механическую задачу; кроме того, из них могут быть выведены все остальные законы механики.

2.3. Закон сохранения импульса

Перед выводом закона сохранения импульса введём некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется *механической системой*. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются *внутренними*. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются *внешними*. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой*. Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т.е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Пусть имеем механическую систему, состоящую из n тел, масса и скорость которых соответственно равны $m_1, m_2..., m_n$ и $v_1, v_2..., v_n$. Пусть $\vec{F}_1^{'}, \vec{F}_2^{'}..., \vec{F}_n^{'}$ – равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а $\vec{F}_1, \vec{F}_2..., \vec{F}_n$ – равнодействующие внешних сил. Запишем закон Ньютона для каждого из n тел:

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} = \vec{F}_1^{'} + \vec{F}_1$$

$$\frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{F}_2^{'} + \vec{F}_2$$

$$-----------$$

$$\frac{d(m_n\vec{v}_n)}{dt} = \vec{F}_n^{'} + \vec{F}_n$$

Складывая почленно эти уравнения, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n,$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n, \qquad (2.12)$$

где $\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i$ – импульс системы.

В случае замкнутой системы $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = 0$. Тогда:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \text{ т.е. } \vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = \text{const}. \qquad (2.13)$$

Уравнение (2.13) выражает закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы *сохраняется*. Это фундаментальный закон. Он является следствием однородности пространства.

2.4. Движение центра масс

Центром масс системы материальных точек называется точка C, положение которой определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m},$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки;

n – число материальных точек в системе;

m – масса всей системы.

Найдём скорость центра масс:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а $\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i$ есть импульс $\vec{p}$ системы, получим:

$$\vec{p} = m\vec{v}_c, \tag{2.14}$$

т.е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость её центра масс. Подставив (2.14) в (2.12), будем иметь:

$$m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n, \tag{2.15}$$

т.е. центр масс системы движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней были бы приложены все внешние силы.

Ускорение центра масс совершенно не зависит от точек приложения внешних сил. Если $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0$, то $\vec{v}_c = \text{const}$. А если это так, то и импульс системы $\vec{p} = \text{const}$.

Уравнение (2.15) по форме совпадает с основным уравнением динамики материальной точки и является его естественным обобщением на систему материальных точек.

2.5. Уравнение движения тела переменной массы

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы, например, масса ракеты уменьшается вследствие истечения газов, образующихся при сгорании топлива, и т. п.

Получим уравнение движения тела переменной массы на примере движения ракеты. Если в момент времени t масса ракеты m, а её скорость $\vec{v}$, то по истечении времени dt её масса уменьшится на dm и будет равной $m - dm$, а скорость станет равной $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение импульса системы за отрезок времени dt

$$d\vec{p} = \left[(m - dm) \cdot (\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + \vec{u}) \right] - m\vec{v},$$

где $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно ракеты.

Тогда

$$d\vec{p} = m \cdot d\vec{v} + \vec{u} \cdot dm$$

(величиной $dm \cdot d\vec{v}$ – пренебрегли).

Если на систему действуют внешние силы, то $d\vec{p} = \vec{F}dt$, поэтому

$$\vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} + \vec{u} \cdot dm,$$

или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u} \cdot \frac{dm}{dt}. \qquad (2.16)$$

Второе слагаемое в (2.16) называют реактивной силой $\vec{F}_p$. Если $\vec{u}$ противоположен $\vec{v}$ по направлению, то ракета ускоряется, а если совпадает с $\vec{v}$, то тормозится.

Таким образом, мы получили уравнение движения тела переменной массы (уравнение И. В. Мещерского):

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_p . \qquad (2.17)$$

Применим (2.16) к движению ракеты, на которую не действуют никакие внешние силы. Полагая $\vec{F} = 0$ и считая, что скорость выбрасываемых газов относительно ракеты постоянна (ракета движется прямолинейно), получим:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} ,$$

откуда

$$v = -u \int \frac{dm}{m} = -u \cdot \ell n\, m + \text{const} .$$

Значение const определим из начальных условий. Если в начальный момент времени скорость ракеты равна нулю, а её стартовая масса m_0, то $\text{const} = u \cdot \ln m_0$. Следовательно,

$$v = u \cdot \ln\left(m_0 / m\right) . \qquad (2.18)$$

Это соотношение называется формулой Циолковского. Она показывает, что: 1) чем больше конечная масса ракеты m, тем больше должна быть стартовая масса ракеты m_0; 2) чем больше скорость истечения u газов, тем больше может быть конечная масса при данной стартовой массе ракеты.

2.6. Работа и мощность

Пусть материальная точка под действием силы $\vec{F}$ совершает перемещение по некоторой траектории 1–2 (рис. 2.2).

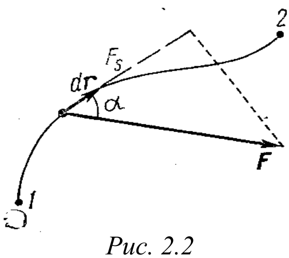


Рис. 2.2

В общем случае сила $\vec{F}$ в процессе движения может меняться как по модулю, так и по направлению. Рассмотрим элементарное перемещение $d\vec{r}$, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной.

Действие силы на перемещении $d\vec{r}$ характеризуют элементарной работой δA силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$. Численно она равна скалярному произведению $\vec{F} \cdot d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left|\vec{F}\right| \cdot \cos\alpha \left|d\vec{r}\right| = F_s \cdot ds, \qquad (2.19)$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$;

$ds = \left|d\vec{r}\right|$ – элементарный путь;

F_s – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$.

Величина δA – алгебраическая: в зависимости от угла между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ она может быть как положительной, так и отрицательной, а в частности, равной нулю (если $\vec{F} \perp d\vec{r}$).

Интегрируя (суммируя) выражение (2.19) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдём работу силы на данном пути:

$$A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_s \cdot ds. \qquad (2.20)$$

Формула (2.20) справедлива не только для материальной точки, но и вообще для любого тела (или системы тел). Надо только иметь в виду, что под $d\vec{r}$ (или ds) следует понимать перемещение *точки приложения силы* $\vec{F}$.

Выражению (2.20) можно придать наглядный геометрический смысл. Изобразим график F_s как функцию положения частицы на траектории. Пусть, например, этот график имеет вид, показанный на рис. 2.3.

Из рисунка видно, что элементарная работа δA численно равна заштрихованной полоске, а работа A на пути от точки 1 до точки 2 – площади фигуры, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью s. При этом площадь фигуры над осью s берётся со знаком плюс (она соответствует положительной работе), а площадь фигуры под осью s – со знаком минус (она соответствует отрицательной работе).

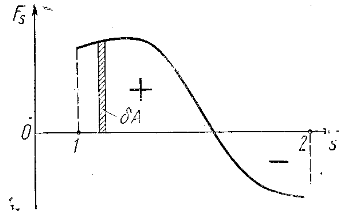


Рис. 2.3

Единица работы – джоуль (Дж): 1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н · м).

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью N:

$$N = \frac{dA}{dt}, \tag{2.21}$$

т.е. мощность – это работа, совершаемая силой за единицу времени. За время dt сила $\vec{F}$ совершает работу $\vec{F} \cdot d\vec{r}$. Тогда мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени,

$$N = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}\,, \tag{2.22}$$

где N – величина скалярная. Единица мощности – ватт (Вт): 1 Вт – мощность, при которой за 1с совершается работа 1Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

2.7. Закон сохранения энергии

Кинетическая энергия. Пусть материальная точка массы m движется под действием некоторой силы $\vec{F}$. Найдём работу, которую совершает эта сила на элементарном перемещении $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} \ .$$

Учитывая, что $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ и $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$, получим:

$$\delta A = m\vec{v} \cdot d\vec{v} \ .$$

Скалярное произведение $\vec{v} \cdot d\vec{v} = v\left(d\vec{v}\right)_v$, где $\left(d\vec{v}\right)_v$ – проекция вектора $d\vec{v}$ на направление вектора $\vec{v}$. Как видно из рис. 2.4, эта проекция равна dv – приращению модуля вектора скорости. Поэтому $\vec{v} \cdot d\vec{v} = v \cdot dv$ и элементарная работа $\delta A = mv \cdot dv = d\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)$.

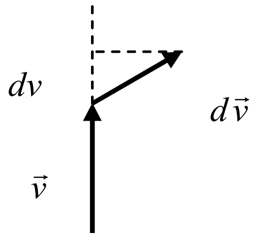


Рис. 2.4

Из последнего соотношения видно, что работа результирующей силы $\vec{F}$ идёт на приращение некоторой величины (стоящей в скобках), которую называют *кинетической энергией*:

$$E_K = \frac{mv^2}{2} \ . \qquad (2.23)$$

Таким образом, приращение кинетической энергии материальной точки при элементарном перемещении равно

$$dE_K = \delta A \ ,$$

а при конечном перемещении из точки 1 в точку 2

$$E_{K_2} - E_{K_1} = A_{12}. \tag{2.24}$$

Отсюда, если $A_{12} > 0$, то $E_{K_2} > E_{K_1}$, если $A_{12} < 0$, то $E_{K_2} < E_{K_1}$.

Кинетическая энергия механической системы – это энергия механического движения этой системы.

Потенциальная энергия – механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Силы бывают консервативными и неконсервативными (диссипативными). Консервативные – это такие силы, работа которых не зависит от того, по какой траектории тело перемещается из одного положения в другое, а зависит только от начального и конечного положений. Примером могут служить гравитационные и кулоновские силы.

Неконсервативные – это силы, работа которых зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую (например, силы трения или силы сопротивления).

Поля консервативных сил называются *потенциальными*. Находясь в таком поле, тело обладает потенциальной энергией E_P. Работа консервативных сил при бесконечно малом изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии:

$$\delta A = -dE_P, \tag{2.25}$$

или

$$\vec{F}d\vec{r} = -dE_P, \text{ откуда} \tag{2.26}$$

$$E_P = -\int \vec{F}d\vec{r} + \text{const},$$

т.е. потенциальная энергия определяется с точностью до произвольной постоянной. Работа A_{12} на конечном перемещении равна

$$A_{12} = E_{P_1} - E_{P_2}. \tag{2.27}$$

Обычно потенциальную энергию на поверхности Земли считают равной нулю, а энергию тела в других положениях отсчитывают от этого уровня.

Из (2.26) следует:

$$F_r = -\frac{dE_P}{dr}. \qquad (2.28)$$

Поскольку направление $d\vec{r}$ выбрано произвольно, то (2.28) выполняется и для других направлений, например, для направлений координатных осей *x*, *y*, *z*:

$$F_x = -\frac{\partial E_P}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_P}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_P}{\partial z},$$

или в векторной форме:

$$\vec{F} = -\mathrm{gr\vec{a}d}\, E_P, \qquad (2.29)$$

где
$$\mathrm{gr\vec{a}d}\, E_P = \frac{\partial E_P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_P}{\partial z}\vec{k} \qquad (2.30)$$

($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей). Вектор, определяемый соотношением (2.30), называется градиентом скаляра E_P.

Конкретный вид функции E_P зависит от характера силового поля. Нетрудно показать, что потенциальная энергия тела массой *m*, поднятого на высоту *h* над поверхностью Земли, равна

$$E_P = mgh, \qquad (2.31)$$

где *h* – отсчитывается от нулевого уровня.

В замкнутой системе полная механическая энергия системы *E* остаётся постоянной:

$$E_K + E_P = E. \qquad (2.32)$$

Выражение (2.32) представляет собой закон сохранения механической энергии.

Этот закон связан с однородностью времени. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчёта времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Если в системе действуют также неконсервативные силы (например, силы трения), то полная механическая энергия системы не сохраняется.

Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. С учётом этой энергии закон сохранения энергии выполняется всегда.

3. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

3.1. Момент инерции

Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс *n* материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 . \tag{3.1}$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$I = \int_{v} \rho r^2 dv , \tag{3.2}$$

где интегрирование производится по всему объёму *V* тела (ρ – плотность тела).

В качестве примера найдём момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой *h* и радиусом *R* относительно оси *OO*, проходящей через его центр масс. Мысленно разобьём цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины dr с внутренним радиусом r и внешним $r + dr$. Момент инерции каждого полого цилиндра $dI = \rho r^2 dv = 2\pi r^3 h\rho dr$. Тогда момент инерции всего цилиндра равен $I = \int_0^R 2\pi h\rho r^3 dr = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi h R^4 \rho = \frac{mR^2}{2}$, так как масса цилиндра равна $\pi R^2 h\rho$.

Если известен момент инерции тела относительно оси *OO*, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси $O'O'$ определяется теоремой Штейнера: момент инерции тела *I* относительно произвольной оси равен моменту его инерции

I_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела C плюс произведение массы тела m на квадрат расстояния a между осями (рис. 3.1):

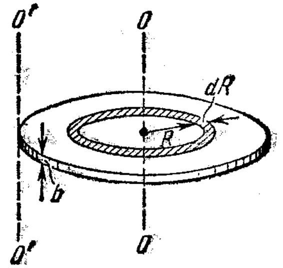


Рис. 3.1

$$I = I_c + ma^2 . \tag{3.3}$$

К настоящему времени моменты инерции тел правильной формы вычислены и приводятся в таблицах.

Момент инерции тела характеризует его *инертные свойства* при вращении.

3.2. Кинетическая энергия твёрдого тела при вращении

Пусть твёрдое тело произвольной формы вращается вокруг проходящей через него неподвижной оси OO' (рис. 3.2). Найдём кинетическую энергию этого тела.

Для этого мысленно разобьём тело на материальные точки с массами $m_1, m_2, ..., m_i$, находящимися на расстоянии $r_1, r_2, ..., r_n$ от оси. При вращении твёрдого тела составляющие его материальные точки будут описывать окружности разных радиусов r и будут иметь различные скорости $\vec{v}_i$.

Кинетическую энергию вращающегося тела найдём как сумму кинетических энергий составляющих его материальных точек:

$$E_{K_{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + ... + \frac{m_n v_n^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2} . \tag{3.4}$$

Так как мы рассматриваем абсолютно твёрдое тело, то угловая скорость вращения всех материальных точек одинакова:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \ldots = \frac{v_n}{r_n}\,. \tag{3.5}$$

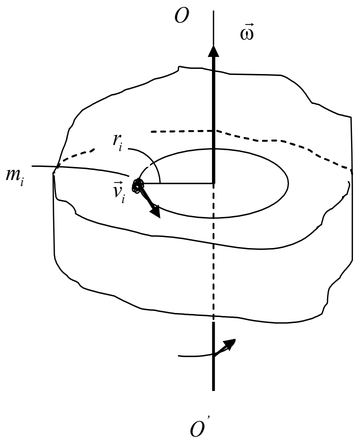


Рис. 3.2

Подставив (3.5) в (3.4), получим:

$$E_{K_{вр}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}\,,$$

где $I = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ – момент инерции тела относительно оси вращения. Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$E_{K_{вр}} = \frac{I\omega^2}{2}\,. \tag{3.6}$$

В случае плоского движения тела (например, цилиндр скатывается с наклонной плоскости без скольжения) энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$E_K = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}, \qquad (3.7)$$

где m – масса катящегося тела,

v_c – скорость центра масс тела,

I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс,

ω – угловая скорость.

3.3. Момент силы

Моментом силы $\vec{M}$ относительно неподвижной точки O называется величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора $\vec{r}$, проведённого из точки O в точку приложения силы A, на силу $\vec{F}$ (рис. 3.3):

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \cdot \vec{F}\right], \qquad (3.8)$$

где $\vec{M}$ – аксиальный вектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ (правило правой руки).

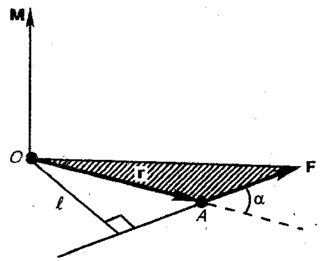


Рис. 3.3

Модуль момента силы

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot \ell, \qquad (3.9)$$

где α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$;

$\ell = r \cdot \sin\alpha$ – плечо силы, т.е. кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O.

Моментом силы относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec{M}$ момента силы, определённого относительно произвольной точки O данной оси Z (рис. 3.4). Значение M_z не зависит от выбора положения точки O на оси Z. Момент силы во вращательном движении является аналогом силы в поступательном движении.

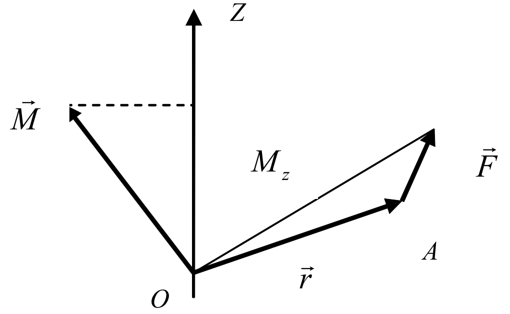


Рис. 3.4

3.4. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

Пусть твёрдое тело вращается вокруг оси, перпендикулярной рисунку и проходящей через точку O (рис. 3.5).

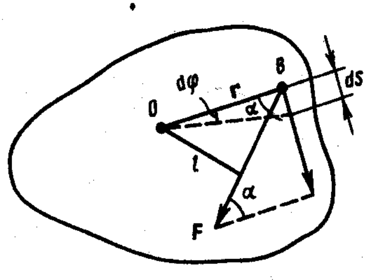


Рис. 3.5

Пусть сила $\vec{F}$ приложена в точке B, находящейся от оси на расстоянии r, α – угол между направлением силы и радиусом-вектором $\vec{r}$. Найдём работу при вращении тела. Так как тело твёрдое, то работа силы $\vec{F}$ равна работе, затраченной на поворот всего тела. При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения B проходит путь $ds = r \cdot d\varphi$ и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \cdot \sin\alpha \cdot r \cdot d\varphi = M_z \cdot d\varphi , \qquad (3.10)$$

т.к. $F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot \ell = M_z$ – момент силы относительно оси Z.

Работа при вращении тела идёт на увеличение его кинетической энергии $dA = dE_K = d\left(\frac{I_z\omega^2}{2}\right) = I_z \cdot \omega \cdot d\omega$, поэтому

$$M_z \cdot d\varphi = I_z \cdot \omega \cdot d\omega . \qquad (3.11)$$

Разделим (3.11) на dt: $M_z \frac{d\varphi}{dt} = I_z \cdot \omega \frac{d\omega}{dt}$, или

$$M_z = I_z \cdot \varepsilon , \qquad (3.12)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение.

Уравнение (3.12) представляет собой основное уравнение динамики вращательного движения относительно неподвижной оси.

Если ось вращения совпадает с главной осью инерции, то это уравнение пишется в виде: $\vec{M} = I \cdot \vec{\varepsilon}$.

3.5. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Момент импульса во вращательном движении является аналогом импульса в поступательном движении. Эта величина вводится в рассмотрение, поскольку в замкнутой системе она сохраняется.

Момент импульса материальной точки. Моментом импульса материальной точки A относительно неподвижной точки O называется величина, определяемая векторным произведением

$$\vec{L} = \left[\vec{r} \cdot \vec{p}\right], \qquad (3.13)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведённый из точки O в точку A;

$\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс материальной точки (рис. 3.6).

$\vec{L}$ – аксиальный вектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{p}$ (правило правой руки). Модуль вектора момента-импульса

$$L = r \cdot p \cdot \sin\alpha = p \cdot \ell ,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$;

ℓ – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O.

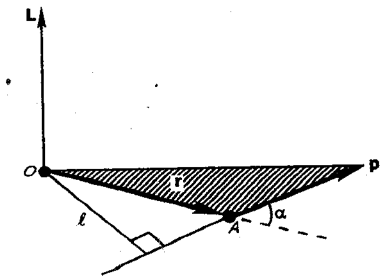


Рис. 3.6

Моментом импульса относительно неподвижной оси Z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки O данной оси. Момент импульса L_z не зависит от положения точки O на оси Z.

Момент импульса твёрдого тела относительно проходящей через него неподвижной оси *OO'*. Чтобы найти этот момент, мысленно разобьём тело на материальные точки.

При этом каждая материальная точка движется по окружности постоянного радиуса r_i со скоростью $\vec{v}_i$. Скорость $\vec{v}_i$ и импульс $m_i\vec{v}_i$ перпендикулярны этому радиусу, т.е. радиус является плечом вектора $m_i\vec{v}_i$. С учётом этого момент импульса отдельной материальной точки равен

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \tag{3.14}$$

и направлен по оси вверх (по правилу правого винта, рис. 3.7).

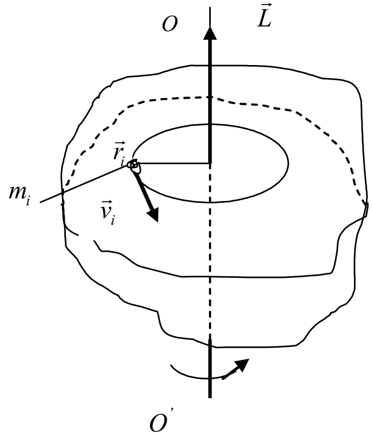


Рис. 3.7

Момент импульса твёрдого тела относительно оси OO' найдём как сумму моментов импульса составляющих его материальных точек:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r\ .$$

Учитывая, что $v_i = \omega r_i$, получим:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = I_z \omega\ ,$$

т.е.

$$L_z = I_z \cdot \omega\ . \tag{3.15}$$

Продифференцируем (3.15) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon = M_z ,$$

т.е.
$$\frac{dL_z}{dt} = M_z . \qquad (3.16)$$

Уравнение (3.16) – ещё одна форма уравнения динамики вращательного движения. Можно показать, что выполняется соотношение

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} , \qquad (3.17)$$

где $\vec{M}$ – момент внешних сил.

В замкнутой системе $\vec{M} = 0$ и $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, откуда

$$\vec{L} = \text{const} . \qquad (3.18)$$

Выражение (3.18) представляет собой закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы с течением времени сохраняется.

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы. Он связан с изотропностью пространства. Изотропность пространства означает, что свойства замкнутой физической системы не меняются при повороте системы на заданный угол относительно любой произвольно выбранной оси вращения.

Проявление закона сохранения (3.18) мы можем наблюдать, следя за тем, как фигуристка начинает и заканчивает вращение. Фигуристка начинает вращение с раскинутыми в стороны руками и далеко отставленной ногой (большие r_i, а значит (3.1), большой момент инерции). Затем она опускает одну руку и поднимает другую, придвигает ногу и вообще старается вся стать как можно ближе к своей оси вращения.

При этом r_i для некоторых элементов тела уменьшаются, что приводит к уменьшению её момента инерции, а значит (3.15), к возрастанию ω. И вот в результате вы видите вместо спортсменки только сплошное и длительное мелькание. Чтобы остановиться, фигуристка просто разводит руки в стороны.

В заключение сопоставим основные величины и уравнения, определяющие поступательное движение и вращение тела вокруг неподвижной оси (табл. 3.1).

Таблица 3.1

Поступательное движение		Вращательное движение	
Перемещение	$d\vec{r}$	Угол поворота	$d\vec{\varphi}$
Скорость	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	M_z или $\vec{M}$
Масса	m	Момент инерции	I
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = I \cdot \omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = I_z \cdot \varepsilon$, $\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$\delta A = F_s \cdot ds$	Работа	$\delta A = M_z \cdot d\varphi$
Кинетическая энергия	$E_K = \dfrac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$E_K = \dfrac{I_z\omega^2}{2}$

Отметим, что приведённые в табл. 3.1 уравнения для вращательного движения могут быть получены из уравнений для поступательного движения путём замены аналогичных величин. К примеру, кинетическая энергия при вращении может быть получена из формулы кинетической энергии при поступательном движении следующим образом. Аналогом m является I, аналогом v – ω. Подставляя эти величины в формулу $E = \dfrac{mv^2}{2}$, будем иметь $E_K = \dfrac{I\omega^2}{2}$.

4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

К концу XIX в. представления ньютоновской механики вполне соответствовали всей совокупности экспериментальных данных, имевшихся в то время.

Первому испытанию подвергся принцип относительности Галилея. По мере развития других разделов физики, в частности оптики и электродинамики, возник естественный вопрос: распространяется ли принцип относительности и на другие явления? Если нет, то с помощью этих (немеханических) явлений можно было бы в принципе различить инерциальные системы отсчёта и, в свою очередь, поставить вопрос о существовании главной, или абсолютной системы отсчёта.

Одно из таких явлений, которое, как ожидали, поразному протекает в разных системах отсчёта – это распространение света. Согласно господствовавшей в то время волновой теории, свет – это механические колебания, распространяющиеся в особой среде – «светоносном эфире», о природе которой, правда, не было единого мнения. Но какова бы ни была природа этой среды, она не может, конечно, покоиться во всех инерциальных системах сразу. Тем самым выделяется одна из инерциальных систем – абсолютная – та самая, «которая неподвижна относительно «светоносного эфира». Полагали, что только в этой системе отсчёта свет распространяется с одинаковой скоростью c во всех направлениях. И если некоторая инерциальная система отсчёта движется по отношению к эфиру со скоростью $\vec{v}$, то в этой системе отсчёта скорость света c' должна подчиняться обычному закону сложения скоростей $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$. Это предположение оказалось возможным проверить на опыте, который был осуществлён Майкельсоном совместно с Морли.

4.1. Опыт Майкельсона

Цель эксперимента заключалась в том, чтобы обнаружить «истинное» движение Земли относительно эфира. Было использовано движение Земли по её орбите со скоростью 30 км/с. Идея эксперимента состояла в следующем.

Свет от источника S (рис. 4.1) посылался в двух взаимно перпендикулярных направлениях, отражался от зеркал A и B, находящихся на одинаковом расстоянии ℓ от источника S, и возвращался в точку S. В этом опыте сравнивалось время прохождения светом обоих путей: SAS и SBS.

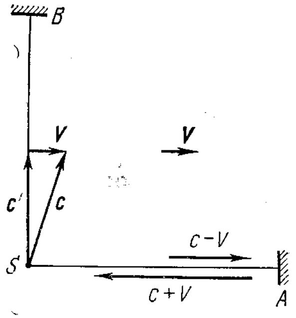


Рис. 4.1

Предположим, что установка вместе с Землёй движется так, что её скорость $\vec{v}$ относительно эфира направлена вдоль SA. Если скорость света подчиняется обычному закону сложения скоростей ($\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$), то на пути SA скорость света относительно Земли равна $c - v$, а на обратном пути $c + v$. Тогда время прохождения пути SAS равно

$$t_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell}{c} \cdot \frac{1}{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}.$$

На пути же SBS скорость света относительно установки равна $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$, и время прохождения этого пути

$$t_2 = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\ell}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} .$$

Из сравнения t_1 и t_2 видно, что свет должен проходить оба пути за разное время. Измерив разность времён $t_1 - t_2$, можно определить скорость установки (Земли) относительно эфира.

Несмотря на то, что ожидаемая разность времён была чрезвычайно мала, установка была достаточно чувствительной, чтобы эту разность надёжно обнаружить.

Тем не менее результат опыта оказался отрицательным: разность времён не была обнаружена. Конечно, случайно могло оказаться, что в момент проведения опыта Земля покоилась относительно эфира. Но тогда через полгода скорость Земли относительно эфира достигла бы 60 км/с. Однако повторение опыта через полгода по-прежнему не дало ожидаемого результата.

Отрицательный результат опыта Майкельсона противоречил тому, что ожидалось на основании преобразований Галилея. Он показал также, что нельзя обнаружить движение относительно эфира, что скорость света не зависит от скорости движения источника. В пользу того, что скорость света не зависит от скорости движения источника, говорят и астрономические наблюдения (например, над двойными звёздами).

К началу XX в. в физике сложилась следующая ситуация. С одной стороны, были предсказаны различные эффекты, выделяющие из множества инерциальных систем главную (абсолютную). С другой стороны, попытки обнаружить эти эффекты на опыте неизменно оканчивались неудачей. Опыт неуклонно подтверждал справедливость принципа относительности. Был сделан ряд попыток объяснения отрицательного результата опыта Майкельсона в рамках ньютоновской механики, но все они в результате оказались неудовлетворительными.

4.2. Постулаты Эйнштейна

На основе анализа экспериментального и теоретического материала Эйнштейном была создана специальная теория относительности. Термин «специальная» говорит о том, что она относится только к инерциальным системам отсчёта.

Эта теория принимает без изменения такие положения ньютоновской механики, как евклидовость пространства и закон инерции Галилея-Ньютона.

В качестве исходных позиций специальной теории относительности Эйнштейн принял два постулата:

1) принцип относительности;

2) независимость скорости света от скорости источника.

Первый постулат представляет собой обобщение принципа относительности Галилея на любые физические процессы:

– все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчёта;

– все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны, т.е. не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

Другими словами, все инерциальные системы отсчёта эквивалентны (неразличимы) по своим физическим свойствам; никаким опытом нельзя в принципе выделить ни одну из них как предпочтительную.

Второй постулат утверждает, что скорость света в вакууме не зависит от движения источника света и одинакова во всех направлениях.

Это значит, что скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта.

Как мы увидим, наличие такой скорости существенно изменяет представления о пространстве и времени.

Из постулатов Эйнштейна следует также, что скорость света в вакууме является предельной. Именно предельный характер этой скорости и объясняет одинаковость скорости света во всех системах отсчёта, иначе эти системы можно было бы отличить друг от друга.

Наличие предельной скорости автоматически предполагает ограничение скорости движения частиц величиной c.

Таким образом, согласно постулатам Эйнштейна, значение всех возможных в природе скоростей движения тел и распространения взаимодействий ограничено величиной c. Этим самым отвергается принцип дальнодействия ньютоновской механики.

Синхронизация часов. По Эйнштейну, физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само *событие*. Для описания события в данной системе отсчёта нужно указать место, в котором оно происходит, и момент времени, когда оно происходит.

Положение точки, в которой происходит событие, может быть определено с помощью жёстких масштабов методами евклидовой геометрии и выражено в декартовых координатах.

Соответствующий же момент времени можно определить с помощью часов, помещённых в ту точку системы отсчёта, где происходит данное событие.

Если же нам надо сравнить время в различных точках системы отсчёта, то надо обеспечить синхронный ход всех часов данной системы.

Ясно, что синхронизировать часы можно только с помощью каких-нибудь сигналов. Наиболее быстрые сигналы, пригодные для этой цели, – световые или радиосигналы, распространяющиеся с известной скоростью c. Выбор именно этих сигналов обусловлен ещё и тем, что их скорость не зависит от направления распространения в пространстве, а также одинакова во всех инерциальных системах отсчёта.

Далее можно поступить следующим образом. Наблюдатель, находящийся, например, в начале координат O данной системы отсчёта, сообщает по радио: «Передаём сигнал точного времени. Сейчас по моим часам время t_0». В момент, когда этот сигнал достигнет часов, находящихся на известном расстоянии r от точки O, их устанавливают так, чтобы они показывали время $t = t_0 + r / c$, т.е. с учётом времени запаздывания сигнала. В результате такой операции можно утверждать, что все часы данной системы отсчёта показывают в каждый момент одно и то же общее время. Существенно отметить, что определённое таким образом время относится лишь к той системе отсчёта, относительно которой синхронизированные часы покоятся.

Соотношения между событиями. Обратимся к вопросу о пространственных и временных соотношениях между данными событиями в разных инерциальных системах отсчёта.

Уже в ньютоновской механике пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, к какой системе отсчёта они относятся. Например, две последовательные вспышки лампочки в движущемся поезде происходят в одной и той же точке системы отсчёта, связанной с поездом, но в разных точках системы отсчёта, связанной с полотном дороги.

В противоположность этому временные соотношения между событиями в ньютоновской механике считаются не зависящими от системы отсчёта. Это значит, что если какие-нибудь два события происходят одновременно в одной системе отсчёта, то они являются одновременными и во всех других системах отсчёта.

Легко, однако, убедиться, что в действительности это не так – *одновременность* (а следовательно, и течение времени) является понятием *относительным*, приобретающим смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчёта это понятие относится.

Пусть имеем стержень AB, движущийся с постоянной скоростью v относительно K-системы отсчёта. В середине стержня находится лампочка O, по концам – в точках A и B – фотоэлементы (рис. 4.2). Пусть в некоторый момент лампочка O дала кратковременную вспышку света. Поскольку скорость распространения света в системе отсчёта, связанной со стержнем, равна c в обоих направлениях, то световые импульсы достигнут равноудалённых от O фотоэлементов A и B в один и тот же момент времени и оба фотоэлемента сработают одновременно.

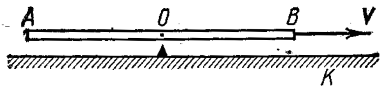


Рис. 4.2

Иначе обстоит дело в K-системе. В этой системе отсчёта скорость световых импульсов в обоих направлениях также равна c, однако проходимые ими пути различны. Действительно, пока световые импульсы идут к точкам A и B, последние переместятся вправо и, следовательно, фотоэлемент A сработает раньше фотоэлемента B.

Таким образом, события, одновременные в одной системе отсчёта, не являются одновременными в другой системе отсчёта, т. е. одновременность в отличие от представлений ньютоновской механики является понятием относительным. А это, в свою очередь, означает, что время в разных системах отсчёта течёт неодинаково.

Если бы в нашем распоряжении имелись мгновенно распространяющиеся сигналы, то события, одновременные в одной системе отсчёта, были бы одновременными и в любой другой системе. Однако таких сигналов в действительности нет.

4.3. Замедление времени и сокращение длины

Рассмотрим три важнейших следствия, которые вытекают из постулатов Эйнштейна, – это равенство поперечных размеров движущихся тел в разных системах отсчёта, замедление хода движущихся часов и сокращение продольных размеров движущихся тел.

Приступая к решению этих вопросов, напомним, прежде всего, что под системой отсчёта подразумевается тело отсчёта, с которым связаны координатная сетка и ряд неподвижных одинаковых часов, синхронизированных между собой. Кроме того, будем полагать, что системы отсчёта являются инерциальными, и что координатные сетки и часы в них проградуированы одинаковым образом.

1. Равенство поперечных размеров тел. Начнём с вопроса о сравнении поперечных размеров тел в разных инерциальных системах отсчёта. Пусть имеем две инерциальные системы отсчёта K и K', оси y и y', которые параллельны друг другу и перпендикулярны направлению движения одной системы относительно другой (рис. 4.3), причём начало отсчёта $O'K'$-системы движется по прямой, проходящей через начало отсчёта OK-системы. Установим вдоль осей y и y' стержни OA и $O'A'$, являющиеся эталонами метра в каждой из этих систем отсчёта. Представим себе далее, что в момент совпадения осей y' и y верхний конец левого стержня сделает метку на оси у K-системы. Совпадёт ли эта метка с точкой A – верхним концом правого стержня?

Принцип относительности позволяет сразу ответить на этот вопрос: да, совпадёт. Если бы это было не так, то с точки зрения обеих систем отсчёта один из стержней оказался бы, например, короче другого и, следовательно, имелась бы возможность экспериментально отличить одну из инерциальных систем отсчёта от другой по более коротким поперечным размерам. Однако это противоречит принципу относительности.

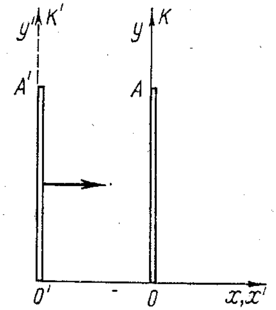


Рис. 4.3

Отсюда следует, что поперечные размеры тел одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта. Это означает, что при указанном выборе начал отсчёта K' и K-систем координаты y' и y любой точки или события совпадают, т. е.

$$y' = y\,.$$

Это соотношение представляет собой одно из искомых преобразований координат.

2. Замедление времени. Наша следующая задача – сравнить течение времени в разных инерциальных системах отсчёта. Как уже отмечалось, время измеряется часами, причём под часами имеется в виду любой прибор, в котором используется тот или иной периодический процесс. Поэтому в теории относительности принято обычно говорить о сравнении хода идентичных часов в разных инерциальных системах отсчёта.

Наиболее просто этот вопрос можно решить с помощью следующего мысленного (т. е. в принципе возможного) эксперимента. Возьмём так называемые световые часы – стержень с зеркалами на обоих концах, между которыми «бегает» короткий световой импульс. Период таких часов равен интервалу времени между двумя последовательными моментами, когда световой импульс достигает какого-то определённого конца стержня.

Далее представим себе две инерциальные системы отсчёта K' и K, движущиеся относительно друг друга со скоростью v. Пусть световые часы AB неподвижны в K'-системе и ориентированы перпендикулярно направлению её движения относительно K-системы (рис. 4.4). Проследим теперь за «ходом» этих часов в обеих системах отсчёта.

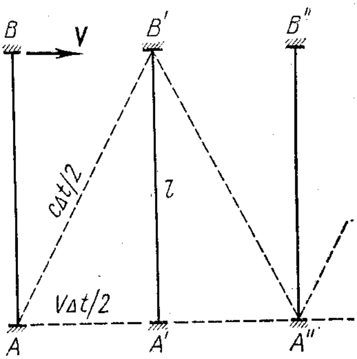


Рис. 4.4

В K'-системе часы неподвижны, и их период

$$\Delta t_0 = \frac{2\ell}{c},$$

где ℓ – расстояние между зеркалами;

c – скорость света.

В K-системе, относительно которой часы движутся, расстояние между зеркалами также ℓ, так как поперечные размеры тел одинаковы в разных инерциальных системах отсчёта. Однако путь светового импульса в этой системе отсчёта будет уже иным – зигзагообразным (см. рис. 4.4). Пока световой импульс распространяется от нижнего зеркала к верхнему, последнее переместится на некоторое расстояние вправо, и т.д.

Поэтому световой импульс, чтобы вернуться к нижнему зеркалу, проходит в *K*-системе больший путь, причём с той же скоростью *c*. Значит, свету понадобится на это больше времени – больше, чем когда часы неподвижны. Другими словами, период движущихся часов удлинится – с точки зрения *K*-системы они будут идти *медленнее*.

Обозначим период движущихся часов через Δt в *K*-системе. Из прямоугольного треугольника $AB'A'$ (см. рис. 4.4) следует, что

$$\ell^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 ,$$

откуда $\Delta t = \dfrac{2\ell/c}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}$.

А так как $\dfrac{2\ell}{c} = \Delta t_0$, то

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} , \qquad (4.1)$$

где $\beta = \dfrac{v}{c}$;

v – скорость часов в *K*-системе.

Отсюда видно, что $\Delta t > \Delta t_0$, т.е. одни и те же часы в разных инерциальных системах отсчёта идут по-разному: в той системе отсчёта, относительно которой часы движутся, они идут медленнее, чем в системе отсчёта, где они покоятся. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся. Это явление называют *замедлением времени.*

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом, в котором происходит какой-либо процесс, называют *собственным временем* этого тела. Его обозначают Δt_0. Как следует из (4.1), собственное время самое короткое. Время Δt того же процесса в другой системе отсчёта зависит от скорости v этой системы относительно тела, в котором происходит процесс. Эта зависимость особенно сильно проявляется для значений скорости v, сравнимых со скоростью света (рис. 4.5).

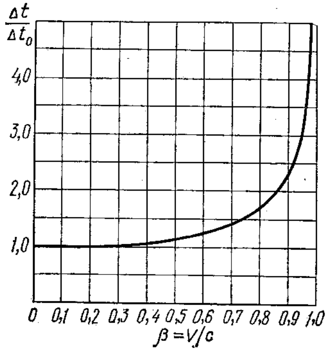


Рис. 4.5

Таким образом, в отличие от ньютоновской механики, течение времени в действительности зависит от состояния движения. Не существует единого мирового времени, и понятие «промежуток времени между двумя событиями» оказывается относительным. Утверждение, что между двумя данными событиями прошло столько-то секунд, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчёта это утверждение относится.

Абсолютное время ньютоновской механики является в теории относительности приближённым понятием, справедливым только при малых (по сравнению со скоростью света) относительных скоростях систем отсчёта. Это сразу следует из (4.1) и видно из рис. 4.5: при $v \ll c \quad \Delta t \approx \Delta t_0$.

Итак, мы пришли к фундаментальному выводу: время в системе отсчёта, движущейся с часами, течёт медленнее (для наблюдателя, относительно которого эти часы движутся). Это же относится и ко всем процессам, протекающим в движущихся относительно наблюдателя системах отсчёта.

Естественно возникает вопрос: заметит ли наблюдатель в K'-системе, движущей относительно K-системы, что его часы идут медленнее, чем часы K-системы? Нет, не заметит. Это сразу же следует из принципа относительности. Если бы K'-наблюдатель тоже обнаружил замедление времени в своей системе отсчёта, то это означало бы, что для обоих наблюдателей K'- и K- время течёт медленнее в одной из инерциальных систем отсчёта. Из этого они заключили бы, что одна из инерциальных систем отсчёта отличается от другой – в противоречии с принципом относительности.

Отсюда следует, что эффект замедления времени является взаимным, симметричным относительно обеих инерциальных систем отсчёта K и K'. Иначе говоря, если с точки зрения K-системы медленнее идут часы K'-системы, то с точки зрения K'-системы, наоборот, медленнее идут часы K-системы (причём в том же отношении). Это обстоятельство указывает на то, что явление замедления времени является чисто *кинематическим*. Оно представляет собой обязательное следствие инвариантности скорости света и никак не может быть приписано какому-либо изменению в свойствах часов, обусловленному их движением.

Формула (4.1) сразу же нашла экспериментальное подтверждение, объяснив «загадочное» на первый взгляд поведение мюонов при прохождении земной атмосферы. Мюоны – это нестабильные частицы, которые самопроизвольно распадаются в среднем через $2 \cdot 10^{-6}$ с (это время измерено в условиях, когда они неподвижны или движутся с малыми скоростями). Мюоны образуются в верхних слоях атмосферы на высоте $20-30$ км. Если бы время жизни мюонов не зависело от их скорости, то, двигаясь даже со скоростью света, они не могли бы проходить путь больше, чем

$$c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ с} = 600 \text{ м}.$$

Однако наблюдения показывают, что значительное число мюонов всё-таки достигает земной поверхности. Это объясняется тем, что время $2 \cdot 10^{-6}$ с – это собственное время (Δt_0) жизни мюонов, т.е. время по часам, движущимся вместе с мюонами. Время же по земным часам должно быть, согласно (5.1), гораздо больше (скорость этих частиц близка к скорости света) и оказывается достаточным, чтобы мюоны могли достигнуть поверхности Земли.

В заключение несколько слов о так называемом «парадоксе часов», или «парадоксе близнецов». Пусть имеются двое одинаковых часов *A* и *B*, из которых часы *A* неподвижны в некоторой инерциальной системе отсчёта, а часы *B* сначала удаляются от часов *A*, а затем возвращаются к ним. Предполагается, что в начальный момент, когда часы находились вместе, они показывали одно и то же время.

С «точки зрения» часов *A* движущимися являются часы *B*, поэтому они идут медленнее и по возвращении отстанут от часов *A*. С «точки же зрения» часов *B*, наоборот, движутся часы *A*, поэтому по возвращении отстанут именно они. Явное противоречие – в этом суть «парадокса».

В действительности в этих рассуждениях допущена принципиальная ошибка. Эта ошибка касается рассуждения с «точки зрения» часов *B*, ибо система отсчёта, связанная с этими часами, является неинерциальной (она сначала удаляется с ускорением, а затем приближается), и мы не имеем права в данном случае использовать результаты, относящиеся только к инерциальным системам отсчёта. Детальный расчёт, выходящий за рамки специальной теории относительности, показывает, что часы, движущиеся с ускорением (в нашем случае часы *B*), идут медленнее, поэтому при возвращении отстанут именно они.

3. Лоренцово сокращение. Пусть стержень AB движется относительно K-системы отсчёта с постоянной скоростью v (рис. 4.6) и длина стержня равна ℓ_0 в системе отсчёта, связанной со стержнем. Наша задача – определить длину ℓ данного стержня в K-системе.

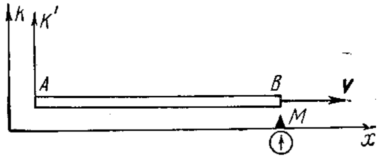


Рис. 4.6

Проведём для этого следующий мысленный эксперимент. Сделаем на оси x K-системы метку M и установим около неё часы. Зафиксируем по этим часам время пролёта Δt_0 стержня мимо метки M. Тогда можно утверждать, что искомая длина стержня в K-системе

$$\ell = v \cdot \Delta t_0 .$$

Для наблюдателя, связанного со стержнем, время пролёта будет иным. Действительно, для него часы, показавшие пролётное время Δt_0, движутся со скоростью $\vec{v}$, а значит, показывают «чужое» время. «Своё» время пролёта Δt для этого наблюдателя будет, согласно (4.1), больше. Это время он может найти из соотношения

$$\ell_0 = v \cdot \Delta t .$$

Из последних двух уравнений, с учётом (4.1), получим:

$$\frac{\ell}{\ell_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \sqrt{1-\beta^2} ,$$

или

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1-\beta^2} , \qquad (4.2)$$

где $\beta = \dfrac{v}{A}$. Длину ℓ_0, измеренную в системе отсчёта, где стержень неподвижен, называют *собственной длиной*.

Таким образом, продольный размер движущегося стержня оказывается меньше его собственной длины, т.е. $\ell < \ell_0$. Это явление называют лоренцовым сокращением. Сравнительно с формой тела в системе отсчёта, где оно покоится, его форма в движущейся системе отсчёта может характеризоваться как сплющенная в направлении движения.

Из формулы (4.2) следует, что степень сокращения зависит от скорости v. Эта зависимость особенно существенно проявляется для значений скорости v, сравнимых со скоростью света (рис. 4.7).

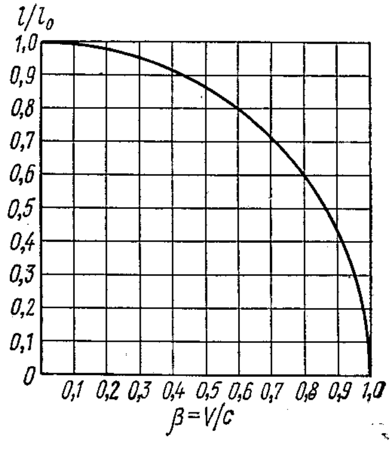


Рис. 4.7

Итак, в разных инерциальных системах отсчёта длина одного и того же стержня оказывается *различной*. При скоростях же $v \ll c$ $\ell \approx \ell_0$ и длина тела приобретает практически абсолютный смысл.

Необходимо отметить, что лоренцово сокращение, как и замедление времени, должно быть взаимным. Значит, лоренцово сокращение является также чисто кинематическим эффектом – в теле не возникает каких-либо напряжений, вызывающих деформацию.

Итак, понятия длины и промежутка времени столь же относительны, как понятия движения и покоя.

4.4. Преобразования Лоренца

Теперь нам предстоит решить фундаментальный вопрос о формулах преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

Напомним, что преобразования Галилея основаны на предположениях, что длина тел не зависит от движения и время течёт одинаково в различных инерциальных системах отсчёта. Однако в предыдущем разделе было показано, что в действительности это не так: течение времени и длина тел зависят от системы отсчёта – выводы, являющиеся неизбежным следствием постулатов Эйнштейна. Поэтому мы вынуждены отказаться от преобразований Галилея, или, говоря точнее, признать, что они – лишь частный случай каких-то более общих преобразований.

Возникает задача отыскания таких формул преобразования, которые, во-первых, учитывали бы замедление времени и лоренцово сокращение (т. е. были бы в конечном счёте следствиями постулатов Эйнштейна), и, во-вторых, переходили бы в предельном случае малых скоростей в преобразования Галилея. Перейдём к решению этой задачи.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчёта – K и K'. Пусть K'-система движется относительно K-системы со скоростью $\vec{v}$. Направим координатные оси обеих систем отсчёта так, как показано на рис. 4.8: оси E и E' совпадают и направлены параллельно вектору $\vec{v}$, а оси y и y' параллельны друг другу. Установим в разных точках обеих систем отсчёта одинаковые часы и синхронизируем их – отдельно часы K-системы и отдельно часы K'-системы. И, наконец, возьмём за начало отсчёта времени в обеих системах момент, когда начала координат O и O' совпадают $(t = t' = 0)$.

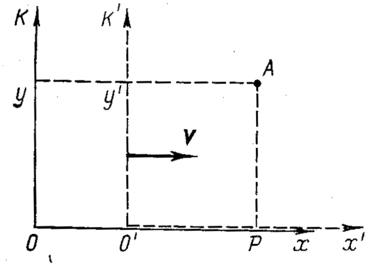


Рис. 4.8

Предположим теперь, что в момент времени t (в K-системе) в точке с координатами x, y произошло некоторое событие A, например, вспыхнула лампочка. Наша задача – найти координаты x', y' и момент времени t' этого события в K'-системе.

Вопрос о координате y' был уже решён ранее: $y' = y$. Поэтому перейдём к нахождению координаты x'. Координата x' характеризует собственную длину отрезка $O'P$, неподвижного в K'-системе (см. рис. 4.8). Длина же этого отрезка в K-системе, где отсчёт производится в момент t, равна $x - vt$. Связь между этими длинами даётся формулой (4.2), согласно которой $x - vt = x'\sqrt{1-\beta^2}$. Отсюда

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (4.3)$$

С другой стороны, координата x характеризует собственную длину отрезка OP, неподвижного в K-системе. Длина же этого отрезка в K'-системе, где измерение производится в момент t', равна $x' + vt'$. Учитывая (4.2), получим:

$$x' + vt' = x\sqrt{1-\beta^2},$$

откуда

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (4.4)$$

Полученные формулы позволяют также установить и связь между моментами времени t и t' события *A* в обеих системах отсчёта. Для этого достаточно исключить из (4.3) и (4.4) x' или x, после чего найдём:

$$t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad (4.5)$$

Формулы (4.3), (4.4) и (4.5) называют *преобразованиями Лоренца*. Они играют фундаментальную роль в теории относительности. По этим формулам осуществляется преобразование координат и времени любого события при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Итак, преобразования Лоренца при переходе от *K*-системы к K'-системе имеют вид:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; y' = y; \; t' = \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (4.6)$$

а при обратном переходе от K'- к *K*-системе –

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; y = y'; \; t = \frac{t' + \frac{x'v}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad (4.7)$$

где $\beta = \frac{v}{c}$, v – скорость K'-системы относительно *K*-системы.

Преобразования Лоренца сильно отличаются от преобразований Галилея (2.3), однако последние могут быть получены из (4.6) и (4.7), если в них формально положить $c = \infty$. Что это значит?

Ранее было отмечено, что в основе преобразований Галилея лежит допущение о синхронизации часов с помощью мгновенно распространяющихся сигналов. Из этого следует, что величина c в преобразованиях Лоренца играет роль скорости тех сигналов, которые используют для синхронизации часов. Если эта скорость бесконечна велика, то получаются преобразования Галилея; если же она равна скорости света, то – преобразования Лоренца. Таким образом, в основе преобразований Лоренца лежит допущение о синхронизации часов с помощью световых сигналов, имеющих предельную скорость.

Особенностью преобразований Лоренца является то, что при $v << c$ они переходят в преобразования Галилея. Это означает, что теория относительности не отвергает преобразования Галилея как неправильные, но включает их в истинные законы преобразования как частный случай, справедливый при $v << c$. В дальнейшем мы увидим, что это отражает общую взаимосвязь между теорией относительности и ньютоновской механикой – законы и соотношения теории относительности переходят в законы ньютоновской механики в предельном случае малых скоростей.

Далее из преобразований Лоренца следует, что при $v > c$ подкоренные выражения становятся отрицательными. Это соответствует тому факту, что движение тел со скоростью, большей скорости света в вакууме, *невозможно*.

Нельзя даже пользоваться системой отсчёта, движущейся со скоростью $v = c$; при этом подкоренные выражения обращаются в нуль. Это значит, что, например, с фотоном, движущимся со скоростью c, принципиально не может быть связана система отсчёта. Или иначе: не существует такой системы отсчёта, в которой фотон был бы неподвижным.

Наконец, необходимо обратить внимание на то, что в формулы преобразования времени входит пространственная координата. Это указывает на неразрывную связь между пространством и временем. Другими словами, речь должна идти не отдельно о пространстве и времени, а о едином пространстве-времени, в котором протекают все физические явления.

4.5. Преобразование скорости

Пусть в K-системе в плоскости x, y движется частица со скоростью $\vec{v}$, проекции которой v_x и v_y. Найдём с помощью преобразований Лоренца (4.6) проекции скорости этой частицы v_x' и v_y' в K'-системе, движущейся со скоростью $\vec{v}$, как показано на рис. 4.9.

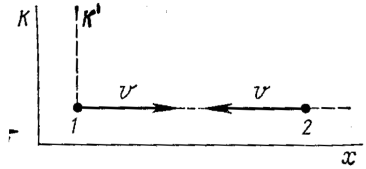


Рис. 4.9

Для этого проведём расчёт по следующей схеме:

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt}, \quad v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt}.$$

Продифференцируем выражение (4.6) для x', y' и t' по времени t и результаты подставим в предыдущие формулы для v_x' и v_y'. После несложных преобразований получим:

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - v_x V / c^2}, \quad v_y' = \frac{v_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 - v_x V / c^2}, \tag{4.8}$$

где $\beta = \dfrac{V}{c}$. Отсюда скорость частицы в K'-системе

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \frac{\sqrt{\left(v_x - V\right)^2 + v_y^2\left(1-\beta^2\right)}}{1 - v_x V / c^2}. \qquad (4.9)$$

Эти формулы выражают релятивистский закон преобразования скорости. При $\vec{V} \ll c$ они переходят в классические формулы преобразования скорости (2.4).

Пусть две релятивистские частицы движутся в K-системе отсчёта навстречу друг другу по одной прямой с одинаковой скоростью v. Найдём: 1) скорость сближения частиц в этой системе отсчёта; 2) их относительную скорость.

Прежде всего, необходимо уточнить, что понимается под каждой из этих скоростей.

1. Скорость сближения – это скорость, с которой уменьшается расстояние между частицами в данной системе отсчёта. В нашем случае она просто равна $2v$, причём эта скорость может быть и больше скорости света – это ничему не противоречит.

2. Под относительной скоростью имеется в виду скорость, с которой одна из частиц движется в системе отсчёта, связанной с другой частицей и перемещающейся поступательно по отношению к исходной K-системе. Чтобы найти эту скорость, выберем ось x вдоль направления движения частиц. Свяжем с одной из частиц, например, частицей 1, которая движется в положительном направлении оси x, K'-систему отсчёта (см. рис. 4.9). Тогда задача сводится к нахождению скорости частицы 2 в этой системе отсчёта. Подставив в формулу (4.8) для v_x – проекции скорости $v_x = -v, V = v$, получим:

$$v_x' = -\frac{2v}{1 + \left(v / c\right)^2}.$$

Знак минус означает, что в данном случае частица 2 движется в отрицательном направлении оси x' K'-системы отсчёта.

Отметим, что даже в том случае, когда обе частицы движутся с максимально возможной скоростью $v \approx c$, скорость v'_x не может превзойти c – это сразу видно из последней формулы.

Наконец, проверим непосредственно, что релятивистские формулы преобразования скоростей соответствуют второму постулату Эйнштейна относительно неизменности скорости света c во всех инерциальных системах отсчёта.

Пусть вектор $\vec{c}$ имеет в K-системе проекции c_x и c_y, т.е. $c^2 = c_x^2 + c_y^2$. Воспользуемся формулой (4.9), преобразовав в ней подкоренное выражение следующим образом:

$$c_x^2 - 2c_x \cdot V + V^2 + \left(c^2 - c_x^2\right) \cdot \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \left(c - \frac{c_x \cdot V}{c}\right)^2 .$$

Подставив этот результат в (4.9), получим:

$$c' = \frac{\left(c - \dfrac{c_x \cdot V}{c}\right)}{1 - \dfrac{c_x \cdot V}{c^2}} = \frac{c\left(1 - \dfrac{c_x \cdot V}{c^2}\right)}{1 - \dfrac{c_x \cdot V}{c^2}} = c .$$

При этом, конечно, вектор c' в K'-системе будет иметь в общем случае другое направление.

4.6. Интервал

Относительный характер пространственных и временных промежутков не означает, что теория относительности отрицает существование каких бы то ни было абсолютных величин. Наоборот, задача, которую ставит перед собой теория относительности, заключается в нахождении таких величин, которые не зависели бы от выбора инерциальной системы отсчёта.

Первой из этих величин является универсальная скорость распространения взаимодействий, равная скорости света в вакууме. Другой величиной является интервал s_{12} между событиями 1 и 2, квадрат которого определяется как

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = \text{inv}\,, \qquad (4.10)$$

где t_{12} – промежуток времени между событиями;

ℓ_{12} – расстояние между двумя точками, в которых происходят данные события $\left(\ell_{12}^2 = x_{12}^2 + y_{12}^2 + z_{12}^2\right)$.

В инвариантности интервала можно легко убедиться, вычислив его непосредственно в K'- и K-системах отсчёта. Воспользовавшись преобразованиями Лоренца (4.6) и учитывая, что $y'_{12} = y_{12}$ и $z'_{12} = z_{12}$, получим:

$$c^2 t_{12}'^2 - x_{12}'^2 = c^2 \frac{\left(t_{12} - x_{12}V / c^2\right)^2}{1-\beta^2} - \frac{\left(x_{12} - Vt_{12}\right)^2}{1-\beta^2} = c^2 t_{12}^2 - x_{12}^2\,.$$

Таким образом, интервал является инвариантной величиной.

В зависимости от того, какая составляющая в интервале преобладает, пространственная или временная, их называют:

– пространственноподобными $\left(\ell_{12} > ct_{12}\right)$;

– времениподобными $\left(ct_{12} > \ell_{12}\right)$.

Кроме этих двух типов интервалов, существует ещё и третий – светоподобный $\left(ct_{12} = \ell_{12}\right)$.

Если интервал между двумя событиями пространственноподобный, то всегда можно найти такую K'-систему отсчёта, в которой оба события происходят одновременно.

Если же интервал времениподобный, то всегда можно найти такую K'-систему отсчёта, в которой оба события происходят в одной точке.

Следовательно, события, разделённые времениподобными или светоподобными интервалами, могут быть причинно связанными друг с другом.

4.7. Геометрическая интерпретация преобразований Лоренца

Рассмотрим релятивистские представления о пространстве-времени с помощью геометрического метода, развитого Минковским.

Пусть имеются две инерциальные системы отсчёта: *K*-система и K'-система, движущаяся относительно первой со скоростью *V*. Сначала построим так называемую диаграмму пространства-времени для *K*-системы, ограничиваясь для большей простоты и наглядности одномерным случаем (рис. 4.10). На оси ординат данной диаграммы откладывают обычно не само время *t*, а величину $\tau = ct$, где *c* – скорость света. Это даёт возможность проградуировать обе оси (O_x и O_τ) в *метрах*, причём в одном и том же масштабе.

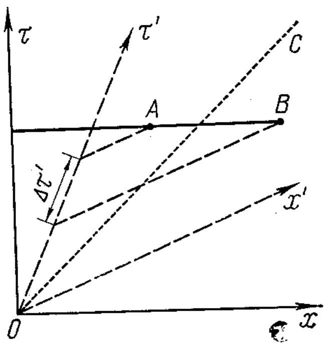


Рис. 4.10

Каждая точка диаграммы – её называют *мировой точкой* – характеризует некоторое событие $A(x,\tau)$. Всякой частице (даже неподвижной) на этой диаграмме соответствует *мировая линия*. Например, ось $O\tau$ – это мировая линия частицы, покоящейся в точке $x = 0$. Ось Ox изображает совокупность всех событий, одновременных с событием *O*, независимо от координаты *x*.

Мировая линия, соответствующая распространению света из точки O в положительном направлении оси Ox, представляет собой биссектрису OC прямого угла.

Изобразим на этой диаграмме оси $O\tau'$ и Ox' K'-системы. Мировую линию начала отсчёта K'-системы получим, положив в преобразованиях Лоренца (4.6) $x'=0$. Тогда $x=Vt=\beta\tau$, где $\beta=V/c$. Это есть уравнение прямой, которая составляет с осью $O\tau$ угол ϑ, определяемый формулой $\operatorname{tg}\vartheta=\beta$. Полученная прямая – мировая линия – представляет собой совокупность всех событий, происходящих в начале отсчёта K'-системы, т.е. ось $O\tau'$.

Ось Ox' K'-системы – это прямая, изображающая все события, одновременные в K'-системе с событием O. Положив в преобразованиях Лоренца (4.6) $t'=0$, получим $ct=xV/c$, или $\tau=\beta x$. Отсюда следует, что ось Ox' составляет с осью Ox тот же угол $\vartheta\left(\operatorname{tg}\vartheta=\beta\right)$.

Таким образом, оси $O\tau'$ и Ox' K'-системы расположены симметрично по отношению к мировой линии света OC и координатная сетка K'-системы (τ',x') оказывается косоугольной. Чем больше скорость V системы K', тем более «сплющенной» будет её координатная сетка.

Построенная диаграмма соответствует переходу от K- к K'-системе. В согласии с принципом относительности для обратного перехода от K'- к K-системе диаграмма будет иметь совершенно симметричный вид: у K'-системы координатная сетка будет прямоугольной, а у K-системы – косоугольной.

Диаграмма Минковского позволяет наглядно интерпретировать такие релятивистские эффекты, как относительность понятия одновременности, замедление времени и лоренцово сокращение.

Например, относительность понятия одновременности следует непосредственно из рис. 4.10. Действительно, события A и B, одновременные в K-системе, в K' -системе оказываются неодновременными. Событие A произойдёт позже события B на время $\Delta\tau'$.

4.8. Релятивистский импульс

Пусть в некоторой инерциальной K-системе отсчёта навстречу друг другу движутся две одинаковые частицы 1 и 2 с одинаковой скоростью v_0 , но под углом α к оси x (рис. 4.11). В этой системе отсчёта суммарный импульс обеих частиц, очевидно, сохраняется: до и после столкновения он равен нулю.

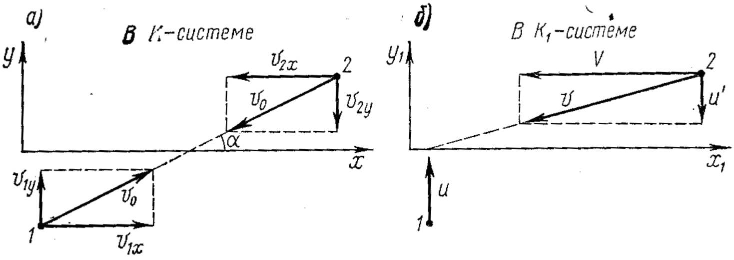


Рис. 4.11

Теперь выясним, как будет обстоять дело в другой инерциальной системе отсчёта. Для этого выберем сначала две системы отсчёта: K_1 -систему, движущуюся вправо со скоростью v_{1x} , и K_2 -систему, движущуюся влево со скоростью v_{2x} (см. рис. 4.11а). Ясно, что частица 1 в K_1 -системе и частица 2 в K_2 -системе движутся только вдоль оси y, причём с одинаковыми по модулю скоростями, которые мы обозначим U.

Рассмотрим картину столкновения в K_1 -системе (см. рис. 4.11б), где частица 1 имеет скорость U. Найдём y-составляющую скорости частицы 2 в этой системе отсчёта, обозначив её U' . Эта частица движется со скоростью U' вдоль оси y в K_2 -системе и, кроме того, вместе с K_2 системой перемещается влево со скоростью V относительно K_1 -системы. Поэтому, согласно (19.1), y-составляющая скорости частицы 2 в K_1-системе равна закону сохранения импульса, независимо от выбора инерциальной системы отсчёта

$$U' = U\sqrt{1-\beta^2} \,. \tag{4.11}$$

Запишем теперь y-составляющие импульсов обеих частиц в K_1-системе: m_1U и m_2U'. Согласно (4.11), $U' < U$, поэтому закон сохранения импульса в ньютоновской формулировке не выполняется. Действительно, в нашем случае $m_1 = m_2$ и, следовательно, y-составляющая суммарного импульса частиц до столкновения отлична от нуля, а после столкновения равна нулю.

Возникает альтернатива: отказаться или от ньютоновского определения импульса, или от закона сохранения этой величины.

Учитывая громадную роль, которую играют законы сохранения, в теории относительности за фундаментальный принимают именно закон сохранения импульса и уже отсюда находят выражения для самого импульса.

С учётом этого потребуем, чтобы закон сохранения импульса выполнялся и в K_1-системе, т.е. положим, что $m_1U_1 = m_2U'$. Отсюда, с учётом (22.1), получим:

$$m_2 = \frac{m_1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{V}{c}\right)^2}} \,.$$

При $\alpha \to 0$ (см. рис. 4.11) $U \to 0$ и m_1 представляет собой массу покоящейся частицы; её обозначают m_0 и называют массой покоя. Скорость же V при этом условии оказывается равной v – скорости частицы 2 относительно частицы 1. Поэтому последнюю формулу можно переписать так:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{4.12}$$

где m – масса движущейся частицы. Её называют *релятивистской*. Они больше массы покоя и зависят от скорости частицы (рис. 4.12). Другими словами, масса одной и той же частицы различна в разных инерциальных системах отсчёта.

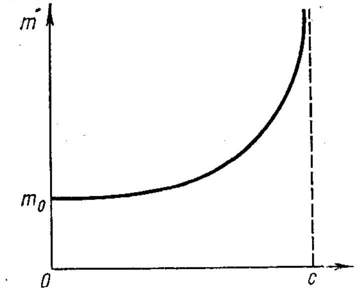


Рис. 4.12

В отличие от релятивистской массы масса покоя частицы m_0 – величина инвариантная, т.е. одинаковая во всех системах отсчёта. По этой причине можно утверждать, что именно масса покоя является характеристикой частицы.

Сделаем последний шаг – напишем выражение для импульса релятивистской частицы:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \tag{4.13}$$

Это и есть так называемый релятивистский импульс частицы. Опыт подтверждает, что так определённый импульс действительно подчиняется закону сохранения независимо от выбора инерциальной системы отсчёта.

4.9. Основное уравнение релятивистской динамики

Как показывает детальное рассмотрение, основное уравнение динамики Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ не удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Чтобы удовлетворить требованиям принципа, основное уравнение динамики должно иметь другой вид и лишь при $v \ll c$ переходит в ньютоновское уравнение. Этим требованиям удовлетворяет уравнение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{4.14}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на частицу. Данное уравнение по виду полностью совпадает с основным уравнением ньютоновской динамики (2.11). Однако физический смысл здесь уже другой: слева стоит производная по времени от *релятивистского импульса*, определяемого формулой (4.13).

Подставив (4.13) в (4.14), запишем последнее уравнение так:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}\right) = \vec{F}. \tag{4.15}$$

Это и есть основное уравнение релятивистской динамики.

Из него следует неожиданный вывод: вектор ускорения $\vec{a}$ частицы в общем случае не совпадает по направлению с вектором силы $\vec{F}$. Покажем это. Для этого запишем (4.12) в такой форме:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F},$$

где m – релятивистская масса частицы.

Выполнив дифференцирование по времени, получим:

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)\vec{v}+m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)=\vec{F}. \qquad (4.16)$$

Это выражение графически представлено на рис. 4.13. Таким образом, действительно вектор ускорения $\vec{a}$ в общем случае не коллинеарен вектору силы $\vec{F}$.

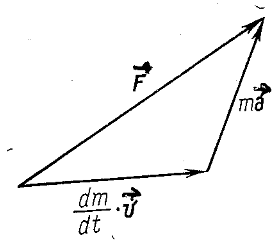


Рис. 4.13

Основное уравнение релятивистской динамики позволяет найти закон действующей на частицу силы $\vec{F}$, если известна зависимость от времени релятивистского импульса $\vec{p}(t)$, а с другой стороны, найти уравнение движения частицы $\vec{r}(t)$, если известны действующая сила и начальные условия – скорость $\vec{v}_0$ и положение $\vec{r}_0$ частицы в начальный момент времени.

5. ЗАКОН ВЗАИМОСВЯЗИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

5.1. Кинетическая энергия релятивистской частицы

Определим эту величину таким же путём, как и в ньютоновской механике, т.е. как величину, приращение которой равно работе действующей на частицу силы. Сначала найдём приращение кинетической энергии dE_K частицы под действием силы $\vec{F}$ на элементарном пути $d\vec{r} = \vec{v}dt$:

$$dE_K = \vec{F}\,\vec{v}dt\ .$$

Согласно (4.14),

$$\vec{F}dt = d\left(m\vec{v}\right) = dm\,\vec{v} + md\,\vec{v}\ ,$$

где m – релятивистская масса. Подставив этот результат в предыдущее уравнение, получим:

$$dE_K = \vec{v}\left(dm\,\vec{v} + md\,\vec{v}\right) = v^2 dm + mv \cdot dv\ , \qquad (5.1)$$

где учтено, что $\vec{v}d\,\vec{v} = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|d\,\vec{v}\right| \cdot \cos\alpha = v \cdot dv$ (α – угол между $\vec{v}$ и $d\,\vec{v}$).

Выражение (5.1) можно упростить, используя формулу (4.12). Возведём (4.12) в квадрат и приведём её к виду

$$m^2c^2 = m^2v^2 + m_0^2c^2\ .$$

Найдём дифференциал этого выражения с учётом того, что m_0 и c – постоянные величины:

$$2mc^2dm = 2mv^2dm + 2m^2v \cdot dv\ ,$$

или

$$c^2dm = v^2dm = mvdv\ . \qquad (5.2)$$

Сравнив (5.1) и (5.2), получим:

$$dE_K = c^2dm\ . \qquad (5.3)$$

Таким образом, приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению её релятивистской массы. Кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а её масса равна массе покоя m_0. Поэтому, проинтегрировав (5.3), получим:

$$E_K = (m - m_0)c^2, \tag{5.4}$$

или

$$E_K = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right), \tag{5.5}$$

где $\beta = V / c$. Это и есть выражение для релятивистской кинетической энергии частицы.

Убедимся, что при малых скоростях $(\beta << 1)$ выражение (5.5) переходит в ньютоновское. Для этого воспользуемся формулой бинома Ньютона, согласно которой

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots$$

При $\beta << 1$ можно ограничиться первыми двумя членами этого ряда. Тогда

$$E_K = \frac{m_0 c^2 \beta^2}{2} = \frac{m_0 v^2}{2}.$$

Таким образом, при больших скоростях кинетическая энергия частицы определяется релятивистской формулой (5.5), отличной от $m_0 v^2 / 2$.

На рис. 5.1 показаны для сравнения графики зависимости от β релятивистской E_{K_p} и ньютоновской кинетических энергий. Их различие особенно сильно проявляется в области скоростей, сравнимых со скоростью света.

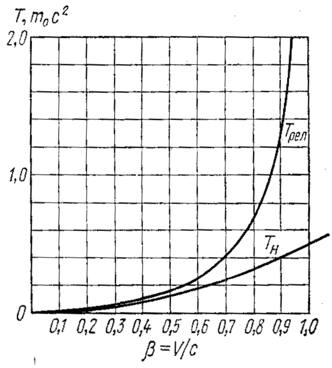


Рис. 5.1

5.2. Закон взаимосвязи массы и энергии

Из формулы (5.3) следует, что приращение кинетической энергии частицы сопровождается пропорциональным приращением её релятивистской массы. Вместе с тем известно, что при протекании различных процессов в природе одни виды энергии могут преобразоваться в другие. Например, кинетическая энергия сталкивающихся частиц может преобразоваться во внутреннюю энергию образовавшейся частицы. Поэтому естественно ожидать, что масса тела будет возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и вообще при любом увеличении общего запаса энергии тела независимо от того, за счёт какого конкретного вида энергии это происходит.

Отсюда Эйнштейн пришёл к следующему фундаментальному выводу: общая энергия тела (или системы тел), из каких бы видов энергии она ни состояла, связана с массой этого тела соотношением

$$E = m \cdot c^2 . \tag{5.6}$$

Эта формула выражает один из наиболее фундаментальных законов природы – закон взаимосвязи массы m и полной энергии E тела.

Обратим внимание на то, что в полную энергию E не включена потенциальная энергия тела во внешнем поле, если таковое действует на тело.

Соотношение (5.6) можно записать и в другой форме:

$$E = m_0 c^2 + E_K .$$

Отсюда непосредственно следует, что покоящееся тело ($E_K = 0$) также обладает энергией

$$E_0 = m_0 c^2 . \qquad (5.7)$$

Из (5.7) следует, что масса тела теперь выступает в новой функции – как мера энергосодержания тела.

Изменение полной энергии тела сопровождается эквивалентным изменением его массы $\Delta m = \Delta E / c^2$, и наоборот.

При обычных макроскопических процессах изменение массы тел оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений.

Однако уже в астрономических явлениях, связанных, например, с излучением звёзд, изменение массы представляет собой весьма внушительную величину. В этом можно убедиться на примере излучения Солнца.

Из астрономических наблюдений установлено, что количество энергии, которое приносит на Землю солнечное излучение за 1с на площадку 1м^2, перпендикулярную солнечным лучам, составляет около $1{,}4 \cdot 10^3$ Дж·с/м^2. Это даёт возможность вычислить суммарную энергию, излучаемую Солнцем за 1с:

$$\Delta E = 1{,}4 \cdot 10^3 \cdot 4\pi \cdot R^2 = 4 \cdot 10^{26} \text{ Дж/с},$$

где $R \approx 150 \cdot 10^6$ км – расстояние от Земли до Солнца. Следовательно, Солнце ежесекундно теряет массу

$$\Delta m = \Delta E / c^2 = 4{,}4 \cdot 10^9 \text{ кг/с}.$$

Величина очень большая с точки зрения земных масштабов, однако по сравнению с массой Солнца эта потеря ничтожно мала: $\Delta m / m = 2 \cdot 10^{-21}\text{с}^{-1}$.

Совершенно иначе обстоит дело в ядерной физике. Именно здесь впервые оказалось возможным экспериментально проверить и подтвердить закон взаимосвязи массы и энергии.

5.3. Связь между энергией и импульсом частицы

Энергия E и импульс p частицы имеют различные значения в разных инерциальных системах отсчёта. Однако оказывается, что существует некоторая комбинация E и p, которая является инвариантной, т. е. имеет одно и то же значение в разных системах отсчёта. Эта величина есть $E^2 - p^2c^2$. Убедимся, что это так.

Воспользовавшись формулами $E = mc^2$ и $p = mv$, запишем:

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 - m^2v^2c^2 = \frac{m_0^2c^4}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = m_0^2c^4. \quad (5.8)$$

Тот факт, что скорость в правой части сократилась, означает независимость величины $E^2 - p^2c^2$ от скорости частицы, а значит, и от системы отсчёта. Другими словами, величина $E^2 - p^2c^2$ действительно является инвариантной.

Приведём ещё два полезных соотношения, с которыми часто приходится встречаться. Первое:

$$\vec{p} = m\vec{v} = E \cdot \vec{v} / c^2 \quad (5.9)$$

и второе:

$$pc = \sqrt{E_K\left(E_K + 2m_0c^2\right)}. \quad (5.10)$$

Последнее соотношение легко получить, подставив в (26.1) $E = m_0 c^2 + E_K$.

Наконец, рассмотрим весьма интересный вопрос о возможности существования частиц с нулевой $(m_0 = 0)$ массой покоя.

Из формул

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

следует, что частица с массой покоя $m_0 = 0$ может иметь энергию и импульс только в том случае, если она движется со скоростью света *c*. При этом обе последние формулы принимают вид $0/0$. Однако это не означает неопределённости энергии и импульса такой частицы. Дело в том, что обе эти величины, оказывается, не зависят от скорости. Связь между импульсом *p* и энергией *E* даётся формулой (5.9), где $v = c$, т.е.

$$p = \frac{E}{c}. \tag{5.11}$$

Таким образом, согласно теории относительности, существование частиц с нулевой массой покоя возможно. Такими частицами являются фотон и, возможно, нейтрино.

5.4. Общая теория относительности

Рассмотрим очень коротко вопрос об общей теории относительности. Она представляет собой современную релятивистскую теорию гравитации.

В теории тяготения Ньютона сила $F = G \cdot m_1 \cdot m_2 / r^2$ действует мгновенно. Но если сила действует мгновенно, то это означает, что сигнал, или энергия, мгновенно передаются от массы m_1 массе m_2. Тем самым нарушается одно из основных положений теории относительности: ни один сигнал, так же как и ни один из видов энергии, не может распространиться со скоростью, превышающей скорость света. Таким образом, Эйнштейн столкнулся с проблемой формулировки релятивистской теории тяготения. Он считал, что его новая теория должна удовлетворять принципу относительности и автоматически приводить к эквивалентности гравитационной и инертной массы. Это убеждение позволило Эйнштейну постулировать так называемый принцип эквивалентности. Этот принцип гласит, что действие гравитационного поля эквивалентно ускорению движущейся системы отсчёта. Например, в самолёте, набирающем высоту с ускорением, пассажир испытывает ощущение, что внезапно увеличилась сила тяжести. В ракете, стартующей с поверхности Земли с ускорением $a = 2g$, на пассажира и все предметы действует сила тяжести, втрое превышающая обычное значение. Эта сила «псевдогравитации» в точности пропорциональна инертной массе. Ни один физический эксперимент на ракете не может ответить на вопрос, возросла ли втрое сила тяжести за счёт внезапного увеличения земного притяжения или же ракета стала ускоренно двигаться относительно Земли.

В общей теории относительности любая масса «возмущает» пространство вокруг себя, в результате чего все тела будут двигаться по траекториям, искривлённым в окрестности возмущающей массы, таким образом, что они приближаются к ней. Уравнения Эйнштейна связывают величину кривизны траекторий с интенсивностью (или массой) источника гравитации.

На классическом языке мы должны были бы сказать, что любое тело, движущееся по искривлённой траектории, будет ускоряться и, следовательно, испытывать действие некоторой силы. В общей же теории относительности это ускорение – свойство пространства, которым объясняется явление гравитации. Поскольку «возмущено» само пространство, все инертные массы будут подвержены одному и тому же воздействию, и принцип эквивалентности удовлетворится автоматически.

Из общей теории относительности следует ряд предсказаний. Одно из них связано с увеличением длины волны при излучении света массивным телом. Этот эффект называется гравитационным красным смещением. Он наблюдается в спектральных линиях Солнца и массивных звёзд.

Как и следовало ожидать, общая теория относительности предсказывает замедление любых часов в гравитационном поле. Например, если пара одинаковых часов на Земле расположена на различной высоте на расстоянии друг от друга по вертикали, скажем 1 м, то нижние часы будут идти медленнее, причём это различие составляет 10^{-16}. Впервые стандарты частоты такой точности были созданы в 60-х годах XX в. на основе эффекта Мёссбауэра; в них используются фотоны, излучаемые радиоактивными ядрами железа ${}_{26}Fe^{57}$, внедрёнными в кристалл. С их помощью в Гарвардском университете на 20-метровой башне удалось продемонстрировать замедление времени, обусловленное гравитацией.

Ещё один эффект, предсказываемый общей теорией относительности, – искривление в направлении центра Солнца светового луча, проходящего вблизи его поверхности. Теория позволяет вычислить гравитационную силу, действующую между Солнцем и фотоном, движущимся со скоростью света. Лишь во время солнечных затмений можно видеть звёзды, чьё кажущееся расположение на небосводе близко к краю Солнца. Наблюдаемые положения этих звёзд действительно сдвинуты на величину, предсказываемую теорией Эйнштейна.

Наконец, общая теория относительности предсказывает рождение во Вселенной «чёрных дыр». Под таким объектом понимается такой звёздный объект, поверхность которого не может покинуть ни свет, ни какой-либо другой сигнал. Такая звезда должна внезапно полностью и навсегда исчезнуть из поля зрения. Тем не менее окружающие её объекты будут по-прежнему испытывать на себе влияние гравитационного поля такой звезды, и приблизившееся к ней извне облако газа начнёт сжиматься и нагреваться, а следовательно, согласно общей теории относительности, будет излучать гравитационные волны. В настоящее время созданы детекторы гравитационных волн, достаточно чувствительные для обнаружения эффекта, связанного со сверхновыми.

Общая теория относительности играет центральную роль в разделе астрофизики, называемой космологией. Космология изучает вопросы, связанные с происхождением, размерами и строением Вселенной. К этим вопросам относятся следующие: конечны или бесконечны размеры Вселенной? Увеличиваются ли они? Как и когда сформировалась наша Солнечная система и галактика? Много ли имеется галактик и как они распределены во Вселенной? Откуда они взялись, и что представляла собой Вселенная до того, как эти галактики образовались? Для того, чтобы изучать космологию, нужно познакомиться, помимо теории относительности, также и с ядерной физикой.

5.5. Неинерциальные системы отсчёта

Существование инерциальных систем отсчёта постулировано в первом законе Ньютона.

Опытным путём установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую систему отсчёта. Поскольку любая другая система отсчёта, движущаяся относительно гелиоцентрической равномерно и прямолинейно, также является инерциальной, существует бесконечное множество инерциальных систем отсчёта.

До сих пор именно этими системами мы всегда пользовались для описания механического движения тел. Между тем во многих случаях необходимо изучать движение по отношению к неинерциальным системам отсчёта, т.е. к таким системам, которые движутся ускоренно относительно инерциальных.

Так, например, движение тел на Земле естественно рассматривать в лабораторной системе отсчёта, которая, как уже отмечено, строго говоря, не является инерциальной. Об этом, в частности, свидетельствует целый ряд явлений – «самопроизвольный» поворот плоскости качания маятника (опыт Фуко), отклонение свободно падающих тел к востоку, подмывание одного из берегов реками, текущими в меридиональном направлении и т.д.

Конечно, неинерциальность этой системы отсчёта невелика и в большинстве задач механики ею можно пренебречь. Однако возможность такого допущения требует специального обоснования, так как иначе неясна величина возникающих при этом погрешностей.

Отметим важную особенность неинерциальных систем отсчёта. В них скорость хода часов в различных точках различна. Поэтому не ясно, как можно измерить длительность процессов, начинающихся в одной точке и заканчивающихся в другой. Усложняется также проблема измерения и сравнения длин. Например, трудно определить понятие длины движущегося тела, если не ясно, что такое одновременность в различных точках.

Ниже мы ограничимся рассмотрением движения с малыми скоростями, когда все эти трудности не возникают и можно считать, что пространственно-временные соотношения в неинерциальной системе отсчёта являются такими же, как и в инерциальной.

С учётом этого допущения на конкретных примерах рассмотрим влияние ускорения системы отсчёта на происходящие в ней механические процессы.

Пусть имеем вагон, который первоначально движется прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{v}$ в направлении, указанном стрелкой на рис. 5.2. Пусть у передней стенки вагона на горизонтальной полке лежит шар A с массой m. Полку будем считать абсолютно скользкой, так что между ней и шаром не возникает никаких сил трения. Рассмотрим явления, происходящие внутри вагона с точки зрения двух систем отсчёта: 1) системы, связанной с полотном железной дороги; 2) системы отсчёта, связанной с вагоном.

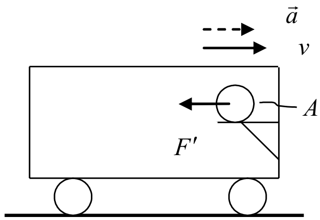


Рис. 5.2

При прямолинейном и равномерном движении в обеих системах на шар не действуют никакие силы (кроме уравновешивающих друг друга силы тяжести и силы реакции опоры). Предположим теперь, что вагон приобрёл постоянное ускорение $\vec{a}$, направленное в ту же сторону, куда направлена и скорость вагона $\vec{V}$.

Рассмотрим поведение шара A в обеих системах отсчёта. Относительно полотна шар продолжает двигаться с первоначальной скоростью $\vec{v}$ и вследствие этого отстаёт от вагона.

В результате, шар, ранее покоившийся относительно полки вагона, начинает скользить по ней в направлении, обратном движению вагона. Отсюда следует, что относительно системы отсчёта, связанной с вагоном, шар приобрёл ускорение $\vec{a}$.

Если допустить, что в системе отсчёта, связанной с вагоном (которая не инерциальна), справедлив второй закон Ньютона, то появление в этой системе ускорения можно формально объяснить действием на шар силы

$$\vec{F} = m\left(-\vec{a}\right),$$

где m – масса шара и $-\vec{a}$ – его ускорение относительно вагона, численно равное ускорению самого вагона. Эта фиктивная сила, которую приходится вводить в ускоренной системе отсчёта, чтобы в ней выполнялся второй закон Ньютона, называется инерционной силой, или силой инерции.

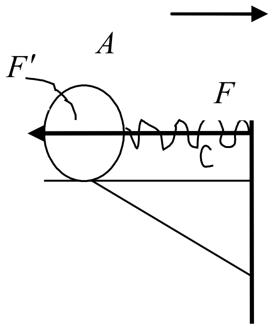


Рис. 5.3

Предположим теперь, что шар, лежащий на полке, скреплён со стенкой вагона пружиной C (рис. 5.3). Тогда при ускорении вагона шар будет отставать от вагона лишь до тех пор, пока пружина не растянется настолько, что появившаяся благодаря растяжению пружины сила не окажется достаточной, чтобы сообщить шару ускорение $\vec{a}$, равное ускорению вагона. Другими словами: пружина тянет шар за вагоном с силой $\vec{F}$, эта сила приложена к шару, направлена в сторону ускорения вагона $\vec{a}$ и численно равна $m\vec{a}$, где m – масса шара. По третьему закону Ньютона, существует вторая сила $\vec{F} = -\vec{F}$, приложенная к пружине и направленная в сторону, обратную направлению ускорения вагона.

По отношению же к системе отсчёта, связанной с вагоном, шар, после того как пружина растянулась, снова окажется относительно вагона в состоянии покоя. Следовательно, в этой системе отсчёта, согласно второму закону Ньютона, сумма сил, приложенных к шару, должна равняться нулю. Этому требованию можно удовлетворить, если приложить к шару инерциальную силу $\vec{F}'$ и считать, что она уравновешивает силу $\vec{F}$, с которой растянутая пружина тянет шар. Эта инерционная сила $\vec{F}' = \vec{F}_1$; таким образом, силу $\vec{F}_1$, появление которой обусловлено выполнением третьего закона Ньютона и которая приложена к пружине («связям») в ускоренной системе отсчёта, мы прилагаем к самому телу (шару *A*). Пользуясь ускоренной системой, связанной с вагоном, мы заменяем динамическую задачу задачей статической, задачей о равновесии шара. Для этого мы считаем приложенной к шару *A* не только действующую на него действительную силу $\vec{F}$, но и силу $\vec{F}_1$, действующую на связь. Такая замена динамической задачи статической возможна для любого случая ускоренного движения.

Пусть на материальную точку с массой *m* действует сила $\vec{F}$. Уравнение движения этой материальной точки выразится вторым законом Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

или

$$\vec{F} + \left(-m\vec{a}\right) = 0.$$

Величина $\vec{F}_1 = -m\vec{a}$, по третьему закону Ньютона, представляет собой силу, действующую на те тела, которые, воздействуя на рассматриваемую материальную точку, сообщают ей ускорение. Прилагая же мысленно силу $\vec{F}' = \vec{F}_1$ к самой материальной точке и называя её силой инерции, мы получим:

$$\vec{F} + \vec{F}' = 0,$$

т.е. в каждый данный момент сила инерции и сила, приложенная к материальной точке, уравновешиваются. Это положение носит название принципа Даламбера.

Рассмотрим ещё ряд примеров возникновения инерционных сил. Предположим, что на полу лифта лежит груз с массой m. Если лифт поднимается вверх с ускорением $\vec{a}$, то такое же ускорение приобретает и груз. Груз приобретает это ускорение в результате давления со стороны пола, добавочного по отношению к тому давлению, которое уравновешивает вес груза. Сила этого давления $\vec{F} = m\vec{a}$. По третьему закону Ньютона, груз, в свою очередь, давит на пол с добавочной силой $\vec{F}_1 = -\vec{F}$. Если груз лежит не прямо на полу, а на чашке пружинных весов (рис. 5.4), то эта сила $\vec{F}_1$ давит на весы; пружина весов сожмётся сильнее, и если весы при отсутствии ускорения лифта указывали вес груза $\vec{P}$, то теперь они укажут вес $\vec{P}' = \vec{P} + \vec{F}'$, где $\vec{F}' = \vec{F}_1$.

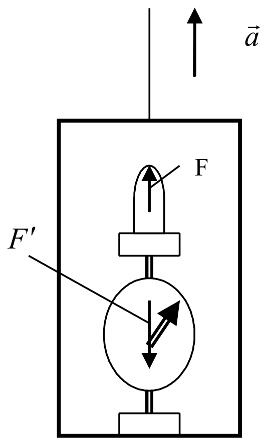


Рис. 5.4

В случае если лифт опускается с ускорением $\vec{a}$, то с таким же ускорением будет двигаться вниз вместе с лифтом и груз. Часть силы тяжести, действующей на груз, будет сообщать ему ускорение. Эта часть силы равна $\vec{F} = m\vec{a}$, откуда давление на весы окажется равным $\vec{P}' = \vec{P} - \vec{F}$.

В обоих случаях показания весов отличны от того показания (P), которое они дают при отсутствии ускорения у лифта.

По отношению же к системе отсчёта, связанной неизменно с лифтом, груз продолжает в обоих случаях покоиться, и изменение показаний весов может быть истолковано изменением веса груза, вызванным тем, что к его истинному весу $\vec{P}$ приложена инерционная сила $\vec{F}'$ (направленная в ту же сторону, что и $\vec{P}$, если ускорение лифта $\vec{a}$ направлено вверх, и направленная в сторону, противоположную $\vec{P}$, если $\vec{a}$ направлено вниз).

Совершенно аналогичным образом объясняется возникновение инерционных сил во *вращающейся системе*. Пусть сидящий на карусели человек держит в руках камень с массой m (рис. 5.5). Для того, чтобы камень двигался вместе с каруселью, т.е. описывал круг радиуса R (где R – расстояние от оси карусели до камня), необходимо камню сообщать центростремительное ускорение $a_n = \omega^2 R$, где ω – угловая скорость вращения карусели. Для этого к камню должна быть приложена центростремительная сила $F = m \cdot \omega^2 R$. Человек должен непрерывно тянуть камень к себе, чтобы заставить его заворачивать. Не будь силы $\vec{F}$, камень начал бы двигаться по касательной τ. По третьему закону Ньютона, камень действует на руки человека с силой $\vec{F}_1 = -\vec{F}$. Эта сила приложена к рукам человека и направлена от центра карусели наружу. Она называется *центробежной*.

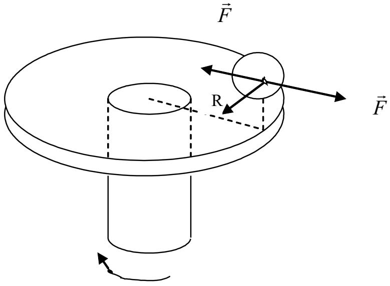


Рис. 5.5

Однако если рассматривать весь процесс по отношению к системе отсчёта, вращающейся вместе с диском, то камень остаётся неподвижным в этой системе отсчёта, и необходимость прилагать к нему силу $\vec{F}$ может быть истолкована как результат того, что к самому камню оказалась приложена сила $\vec{F}' = \vec{F}_1$, направленная от центра карусели наружу. Это есть инерционная сила, совершенно аналогичная инерционным силам, рассмотренным нами в примерах с ускорениями вагона и лифта.

В повседневной жизни нам часто приходится встречаться с инерционными силами. Например, когда автомобиль начинает резко тормозить или поворачивать на большом ходу, мы оказываемся соответственно отброшенными по отношению к автомобилю вперёд или в сторону, наружную по отношению к завороту; это является следствием того, что мы сохраняем скорость, которую имели раньше, автомобиль же приобретает ускорение. По отношению же к системе отсчёта, связанной с автомобилем, эти относительные смещения объясняются действием инерционных сил. Эти силы приходится учитывать во всякой ускоренной системе как добавочные по отношению к силам, действующим в инерциальной системе.

Центробежные силы инерции используются во всех центробежных механизмах: насосах, сепараторах и т. д., где они достигают огромных значений. При проектировании быстро вращающихся деталей машин (роторов, винтов самолётов и т. д.) принимаются специальные меры для уравновешивания центробежных сил инерции.

В общей теории относительности силы инерции эквивалентны силам тяготения. В примере с лифтом мы видели, что ускорение лифта ведёт к тому же результату, как если бы груз становился тяжелее или легче (в зависимости от направления ускорения $\vec{a}$), т. е. силы оказываются эквивалентными силам тяжести.

Таким образом, выходит, что ускорение какой-либо системы эквивалентно появлению в этой системе сил тяготения. Однако, как показал В. А. Фок, такая эквивалентность несправедлива в пределах больших пространственных и временных масштабов.

Зависимость силы тяжести от широты местности. Пользование инерционными силами весьма удобно для решения различных механических задач в ускоренной системе, в частности, во вращающейся системе. Такого рода вращающейся системой является и земной шар. Поэтому при точном рассмотрении различных механических процессов, происходящих на поверхности Земли, следует принимать во внимание инерционные силы, возникающие от суточного вращения. Эти силы невелики, поэтому во многих случаях ими можно пренебречь.

Рассмотрим влияние суточного вращения Земли на силу тяжести. Пусть тяжёлое тело A с массой m находится на широте φ (рис. 5.6). Решая задачу по отношению к координатной системе, вращающейся вместе с Землёй, мы должны учесть инерционную силу

$$F = m\omega^2 R_1, \tag{5.12}$$

где ω – угловая скорость вращения Земли;

R_1 – расстояние от земной оси до тела.

Сила $\vec{F}$ направлена перпендикулярно к земной оси. Эта сила $\vec{F}$ складывается с силой тяжести тела $\vec{P}_0$, направленной к центру Земли. С учётом этого кажущийся вес тела $\vec{P}_\varphi$ на широте φ равен

$$\vec{P}_\varphi = \vec{P}_0 + \vec{F} . \quad (5.13)$$

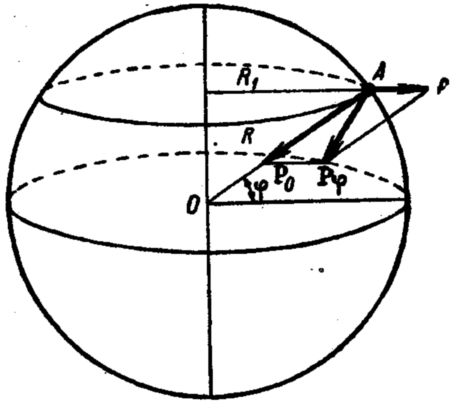


Рис. 5.6

Из рис. 5.6 имеем: $R_1 = R \cdot \cos\varphi$, где R – радиус Земли. Тогда по (5.12)

$$F = m\omega^2 R \cdot \cos\varphi . \quad (5.14)$$

Эта сила мала по сравнению с силой тяжести. В самом деле, $P_0 = mg_0$, откуда

$$\frac{F}{P_0} = \frac{\omega^2 R}{g_0} \cdot \cos\varphi ;$$

если подставить вместо ω, R и g_0 их численные значения, то окажется, что $\frac{\omega^2 R}{g_0} = \frac{1}{289}$, косинус же угла φ всегда ≤ 1, т.е. действительно сила F много меньше силы тяжести P_0.

С учётом этого, а также принимая во внимание, что Земля не представляет собой правильной сферы, зависимость в оси тела от широты имеет вид

$$P_\varphi = P_0\left(1 - \frac{1}{191}\cdot\cos^2\varphi\right).$$

На полюсе P_φ совпадает с P_0; на экваторе P_φ наиболее отличается от P_0.

Силы Кориолиса. Покажем, что во вращающейся системе на тело, перемещающееся относительно этой системы, действует, кроме центробежной, ещё добавочная сила.

Рассмотрим сперва частный случай. Пусть система представляет собою диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси *О* (рис. 5.7) в направлении, указанном стрелкой. Пусть некоторое тело перемещается равномерно из точки *А* вдоль радиуса *ОС* со скоростью V' относительно диска. За время Δt тело пройдёт отрезок $\Delta\ell = AB = v'\cdot\Delta t$. За это время Δt в неподвижной системе координат радиус *ОС*, благодаря вращению диска, повернётся на угол $\Delta\varphi = \omega\cdot\Delta t$, и тело передвинется из *А* в *Д*. В неподвижной системе координат тело принимает одновременно участие в двух движениях: в движении относительно диска со скоростью v' и в движении вместе со вращающимся диском. Линейная скорость вращения диска различна для разных мест диска. Обозначим её значение в точке *А* через v_r. Двигаясь лишь со скоростью v_r тело описало бы дугу AA' и пришло бы в точку A'. Двигаясь одновременно со скоростью v_r и относительной скоростью v', тело должно было бы попасть в точку B' (отрезок $A'B' \parallel AB$). На самом деле тело переходит в точку *Д*. Это происходит за счёт того, что линейная скорость вращения v_r возрастает по мере удаления тела от центра вращения. Таким образом, относительно неподвижной системы координат тело, двигаясь вдоль радиуса, непрерывно меняет свою скорость: оно движется ускоренно. Величина этого ускорения a может быть определена по тому добавочному пути $\Delta\breve{s} = \breve{B}Д$, который тело прошло за время Δt. Из рис. 5.7 имеем:

$$\Delta s = A'B' \cdot \Delta\varphi ,$$

или, так как $A'B' = \Delta\ell = v'\Delta t$ и $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$, то

$$\Delta s = \omega v' \left(\Delta t\right)^2 . \qquad (5.15)$$

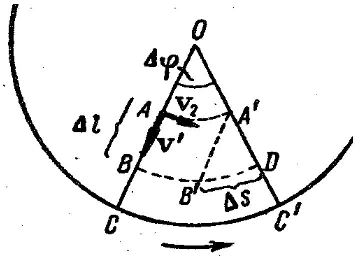


Рис. 5.7

Следовательно, добавочный путь Δs возрастает пропорционально квадрату времени Δt. Но пропорциональность пути квадрату времени Δt имеет место при движении с постоянным ускорением a (равномерно-ускоренном движении) при котором

$$\Delta s = \frac{1}{2} a \left(\Delta t\right)^2 .$$

Сравнивая это выражение с (5.15), получим, что тело испытывает ускорение

$$a = 2v'\omega . \qquad (5.16)$$

Это ускорение направлено перпендикулярно к относительной скорости v' , и в нашем случае – направо (рис. 5.8). Для того чтобы сообщить телу это ускорение, к нему необходимо приложить силу F , направленную направо и равную $F = ma$, где m – масса тела. Не будь силы F , тело отклонилось бы во вращающейся вместе с диском системе координат от своего «прямолинейного» движения вдоль радиуса диска.

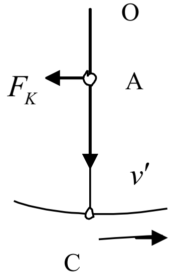


Рис. 5.8

Сила F_K, равная силе F, но направленная в противоположную сторону, будет действовать по третьему закону Ньютона на те связи, которые удерживают тело при его движении на радиусе. Совершенно аналогично, как в ранее рассмотренных случаях ускоренных систем, пользуясь координатной системой, вращающейся вместе с диском, будем считать, что сила F_K приложена к самому телу. Таким образом, во вращающейся системе к телу, движущемуся вдоль радиуса со скоростью v', приложена «инерционная сила»

$$F_K = 2v'\omega m, \tag{5.17}$$

направленная перпендикулярно к v' (в нашем случае налево). Сила F_K носит название *силы Кориолиса*.

Покажем теперь, что сила Кориолиса существует и в том случае, когда тело движется на диске по окружности с центром на оси вращения (рис. 5.9). При движении тела относительно диска со скоростью v' полная скорость в неподвижной системе координат равна $v_r + v'$, где v_r – линейная скорость вращения диска в том месте, где находится тело. Следовательно, на тело действует центростремительная сила

$$F_ц = \frac{m\left(v_r + v'\right)^2}{R},$$

где R – расстояние от оси вращения до тела. Возводя в этой формуле сумму в квадрат, получим:

$$F_ц = \frac{mv_r^2}{R} + \frac{mv'^2}{R} + 2\frac{v' \cdot v_r}{R} \cdot m.$$

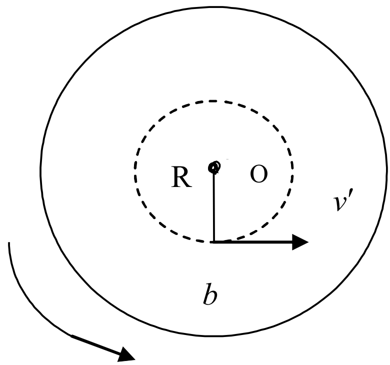


Рис. 5.9

В координатной системе, связанной с диском, член $\frac{mv^2}{R}$ определяет инерционную центробежную силу, вызванную вращением диска с угловой скоростью ω; член $\frac{mv'^2}{R}$ определяет центробежную силу, вызванную относительным движением тела по кругу радиуса R со скоростью v'; член $F = 2\frac{v' \cdot v_r}{R} \cdot m = 2v'\omega m$ определяет добавочную силу, вызванную одновременным наличием как вращения диска, так и движения тела относительно диска. Сила F_K, равная силе F, но направленная в противоположную сторону, даст для этого случая силу Кориолиса.

Эта сила совпадает по величине с силой, возникающей при движении по радиусу, и направлена также перпендикулярно к относительной скорости.

Теперь рассмотрим случай, когда тело движется с относительной скоростью $\vec{v}'$, направление которой составляет угол β с радиусом *OC* (рис. 5.10).

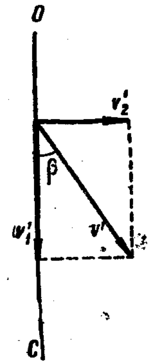


Рис. 5.10

В этом случае скорость $\vec{v}'$ можно разложить на две составляющие: на составляющую вдоль радиуса $v_1' = v' \cdot \sin\beta$ и составляющую, перпендикулярную к радиусу, $v_2' = v' \cdot \sin\beta$. Составляющей v_1' по формуле (5.17) соответствует кориолисова сила $F_{K_1} = 2v'\omega \cdot \cos\beta \cdot m$, составляющей v_2' – сила $F_{K_2} = 2v'\omega \cdot \sin\beta \cdot m$; полная сила Кориолиса

$$F_K = \sqrt{F_{K_1}^2 + F_{K_2}^2} = 2v'\omega \cdot m .$$

Таким образом, и для произвольного направления относительной скорости $\vec{v}'$ для силы Кориолиса сохраняется выражение (5.17).

Наконец, рассмотрим самый общий случай, когда тело движется в направлении, составляющем угол α с осью вращения (рис. 5.11).

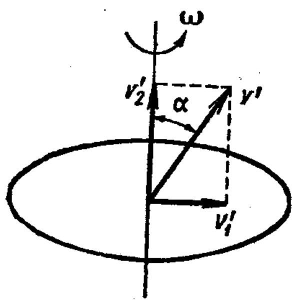


Рис. 5.11

Разложим скорость $\vec{v}$ на составляющую $\vec{v}_1'$, перпендикулярную к оси вращения, и составляющую $\vec{v}_2'$, параллельную оси вращения. Последняя составляющая не обусловливает никакого изменения расстояния от оси и, следовательно, не может вести к появлению добавочных ускорений и сил. Отсюда величина силы Кориолиса определяется лишь составляющей $v_1' = v' \cdot \sin\alpha$. Заменяя в формуле (5.17) v' через $v_1' = v' \cdot \sin\alpha$, получим общее выражение для силы Кориолиса:

$$F_K = 2v'\omega \cdot \sin\alpha \cdot m, \tag{5.18}$$

или

$$\vec{F}_K = 2\left[\vec{v}' \cdot \vec{\omega}\right]m. \tag{5.19}$$

Направление силы Кориолиса определяется по правилу буравчика.

Как отмечено выше, сила Кориолиса проявляется, в частности, при движениях по поверхности земного шара, обладающего определённой угловой скоростью благодаря суточному вращению.

Из перечисленных в настоящем разделе эффектов рассмотрим несколько подробнее отклонение плоскости качания маятника.

Предположим для простоты, что маятник совершает колебания на северном полюсе. Тогда скорость груза маятника $\vec{v}'$ всё время перпендикулярна к оси земного шара (при большой длине нити) и, следовательно, $\vec{v}' \perp \vec{\omega}$, где $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости Земли. В результате на груз маятника действует сила Кориолиса, численно равная $F_K = 2mv'\omega$, лежащая в горизонтальной плоскости и направленная вправо по отношению к вектору $\vec{v}'$. Под действием этой силы груз маятника при каждом размахе отклоняется вправо. В результате плоскость качаний маятника будет поворачиваться относительно Земли в направлении часовой стрелки и повернётся на угол 2π за сутки. В случае качаний маятника на широте φ (рис. 5.12) плоскость качаний повернётся в сутки на угол $2\pi \cdot \sin\varphi$.

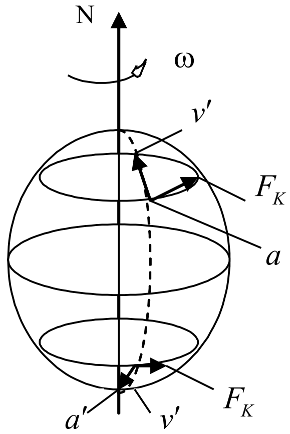


Рис. 5.12

Наблюдение отклонения плоскости качаний маятника было впервые проведено Фуко в 1851 г. и послужило прямым доказательством существования суточного вращения Земли.

В заключение обратим ещё раз внимание на то, что силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а *ускоренным движением системы отсчёта*.

Для любого из тел, находящихся в неинерциальной системе отсчёта, силы инерции являются внешними, следовательно, здесь нет замкнутых систем. Это означает, что в неинерциальных системах отсчёта не выполняются законы сохранения импульса, энергии и момента импульса.

Возникает вопрос о «реальности» или «фиктивности» сил инерции. В ньютоновской механике, согласно которой сила есть результат взаимодействия тел, на силы инерции можно смотреть как на «фиктивные», «исчезающие» в инерциальных системах отсчёта. Однако возможна и другая их интерпретация. Так как взаимодействия тел осуществляются посредством силовых полей, то силы инерции можно рассматривать как воздействия, которым подвергаются тела со стороны каких-то реальных силовых полей, и тогда их можно считать «реальными». Независимо от того, рассматриваются ли силы инерции в качестве «фиктивных» или «реальных», многие явления, о которых упоминалось в настоящем разделе, объясняются с помощью сил инерции.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое тело можно считать материальной точкой, абсолютно твёрдым телом? Почему в механике вводят такие модели?
2. Каковы направления относительно траектории нормального и тангенциального ускорений и чем определяется их абсолютное значение?
3. Откуда следует, что угловая скорость является вектором? Являются ли векторами конечные угловые перемещения?
4. Что такое вектор углового ускорения? Как он направлен, если угловая скорость неизменна по направлению?
5. Какая система отсчёта называется инерциальной? Почему система отсчёта, связанная с Землёй, строго говоря, неинерциальна?
6. Является ли первый закон Ньютона следствием второго закона? Почему? Всегда ли выполняется третий закон Ньютона?
7. Что называется механической системой? Какие системы являются замкнутыми? Является ли Вселенная замкнутой системой?
8. Каким свойством пространства обусловливается справедливость закона сохранения импульса? Как движется центр масс замкнутой системы?
9. Как найти работу переменной силы? Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности радиусом R?
10. Дайте определения кинетической и потенциальной энергий. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
11. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
12. Сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.

13. Что такое момент импульса материальной точки, твёрдого тела? Почему фигурист со сложенными на груди руками вращается быстрее, чем с разведёнными?

14. Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?

15. Каковы причины возникновения специальной теории относительности?

16. Сформулируйте постулаты специальной теории относительности. Приведите пример события, одновременного в одной системе отсчёта и неодновременного в другой.

17. При каких условиях преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея?

18. В чём состоит «парадокс близнецов»?

19. В чём заключается закон сохранения релятивистского импульса? Сформулируйте основной закон релятивистской динамики.

20. Сформулируйте и запишите закон взаимосвязи массы и энергии. Приведите примеры его экспериментального подтверждения.

21. В чём состоит принцип эквивалентности?

22. Когда и почему необходимо рассматривать силы инерции?

23. Как направлены центробежная сила инерции и сила Кориолиса? Когда они проявляются?

24. В северном полушарии производится выстрел вдоль меридиана на север. Как скажется на движении снаряда суточное вращение Земли?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Определить направление движения материальной точки через время $t_1 = 0{,}5$ с и $t_2 = 3$ с после начала движения, если её движение вдоль оси *OX* описывается уравнением $x = 10t - 2t^2$.

Решение

Направление движения в конкретный момент времени определяется направлением вектора мгновенной скорости $\vec{v}$ и направлением бесконечно малого перемещения $d\vec{r}$. Если проекция вектора скорости на выбранное направление положительна, то точка движется в этом направлении, если отрицательна – в противоположном.

Используем координатный способ описания движения:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_x(t) = 10 - 4t.$$

Подставляем в полученную формулу значения t_1 и t_2, находим:

$$v_x(t_1) = 8 \text{ м/с}; \; v_x(t_2) = -2 \text{ м/с}.$$

Следовательно, в момент времени t_1 точка движется в положительном направлении оси *OX*, а в момент времени t_2 – в противоположном.

Задача 2. Камень, привязанный к верёвке, вращается замедленно по окружности так, что его угловая скорость зависит от угла поворота φ по закону $\omega = \omega_0 - A\varphi$, где A и ω_0 заданы в системе единиц СИ, причём $\omega_0 > 0, A > 0$. В момент времени $t = 0$ угол $\varphi = 0$. Найти зависимость от времени угловой скорости $\omega(t)$ и угла поворота $\varphi(t)$.

Решение

1. Взяв производную по времени от левой и правой частей выражения

$$\omega = \omega_0 - A\varphi\,, \qquad (1)$$

получим:

$$\frac{d\omega}{dt} = -A\frac{d\varphi}{dt}\,. \qquad (2)$$

По определению $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$. (3)

Подставив (3) в (2), будем иметь:

$$\frac{d\omega}{dt} = -A\omega\,. \qquad (4)$$

Разделим в (4) переменные и проинтегрируем в пределах от ω_0 до ω и от 0 до t:

$$\int\limits_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega}{\omega} = -\int\limits_0^t A\cdot dt; \quad \ln\omega\Big|_{\omega_0}^{\omega} = -A\cdot t; \quad \ln\frac{\omega}{\omega_0} = -At\,,$$

откуда

$$\omega = \omega_0\cdot e^{-At}\,. \qquad (5)$$

2. Из (1) имеем:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{A} - \frac{\omega}{A}\,. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим:

$$\varphi = \frac{\omega_0}{A} - \frac{\omega_0}{A}\cdot e^{-At} = \frac{\omega_0}{A}\left(1 - e^{-At}\right).$$

Задача 3. Тело брошено с башни высотой H в горизонтальном направлении со скоростью v_0: 1) определить, как зависят от времени координаты тела и его полная скорость; 2) вывести уравнение траектории; 3) определить расстояние от основания башни до места падения тела; 4) определить нормальное и тангенциальное ускорения через t секунд после начала движения.

Решение

1. Тело движется вдоль оси x равномерно и равноускоренно вдоль оси y. Значит:

$$v_x = v_0;\ v_y = gt;\ v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}\ .$$

$$x = v_0 t, \tag{1}$$

$$y = H - \frac{gt}{2}. \tag{2}$$

2. Из (1):

$$t = \frac{x}{v_0}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), получим:

$$y = H - \frac{gx_{\max}^2}{2v_0^2}\ \text{(парабола).} \tag{4}$$

3. При $y = 0$ из (4) получим:

$$0 = H - \frac{gx_{\max}^2}{2v_0^2}\ ,$$

откуда

$$x_{\max} = v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}\ . \tag{5}$$

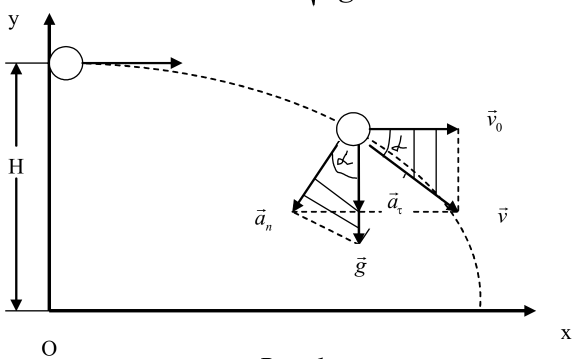


Рис. 1

4. Из рис. 1:

$$a_n = g \cdot \cos\alpha \,, \tag{6}$$

$$a_\tau = g \cdot \sin\alpha \,. \tag{7}$$

Из подобия треугольников скоростей и ускорений следует:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v}; \ \sin\alpha = \frac{v_y}{v} \,.$$

Подставляя эти выражения в (6) и (7), получим:

$$a_n = g\frac{v_x}{v} = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}; a_\tau = g\frac{v_y}{v} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \,.$$

Задача 4. В аттракционе «мотоциклетные гонки по вертикальной стене» трек представляет собой вертикальную цилиндрическую поверхность диаметром 18 м (рис. 1). С какой скоростью должен двигаться мотоциклист, чтобы не соскользнуть с трека? Коэффициент трения $\mu = 0{,}8$.

Решение

Расставим силы, действующие на мотоциклиста, и запишем второй закон Ньютона в векторной форме и в проекциях на координатные оси x и y:

$$m\vec{a}_y = \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} \,.$$

OX:

$$m\frac{v^2}{R} = N \,, \tag{1}$$

где R – радиус трека;

OY:

$$0 = F_{тр} - mg. \tag{2}$$

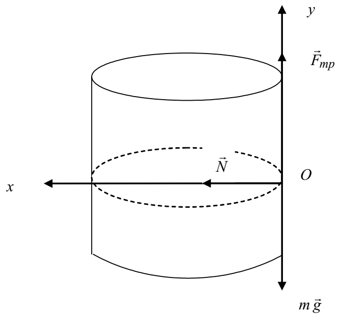


Рис. 1

Из (2) следует: $F_{тр} = mg$, или $\mu N = mg$, откуда

$$N = \frac{mg}{\mu}. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{mg}{\mu},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{R \cdot g}{\mu}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 9{,}8}{0{,}8}} = 10{,}5 \text{ м/с}.$$

Задача 5. Через неподвижный блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к которой подвешены три груза (рис. 1) массой m = 2 кг каждый. Найти ускорение грузов и силу натяжения нити, связывающей грузы 1 и 2. Блок невесомый.

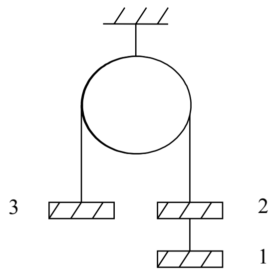


Рис. 1

Решение

Нарисуем схему опыта и расставим силы (рис. 2).

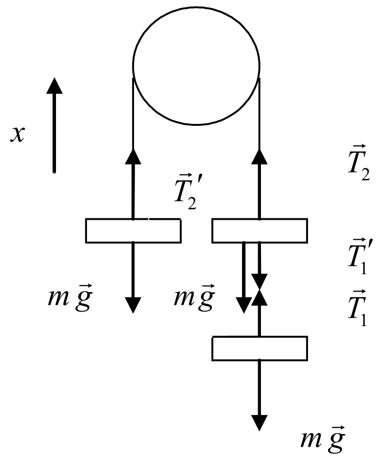


Рис. 2

Очевидно, что $T_2 = T_2'$; $T_1 = T_1'$. В задаче три неизвестных и три груза. Составим для каждого груза уравнение по второму закону Ньютона:

$$\left.\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T_1 \\ m_2 a &= T_1 + m_2 g - T_2 \\ m_3 a &= T_2 - m_3 g \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решая эту систему уравнений, найдём неизвестные величины. Учитывая, что $m_1 = m_2 = m_3 = m$, сложим уравнения (1). Тогда получим:

$$3ma = mg,$$

откуда

$$a = \frac{g}{3}.$$

Подставив этот результат в первое из уравнений (1), получим:

$$T_1 = m\,g - m\frac{g}{3} = \frac{2}{3}m\,g\ .$$

Задача 6. С наклонной плоскости (рис. 1) скатывается без скольжения однородный диск массой m. Найти силу трения, если угол наклона плоскости к горизонту α.

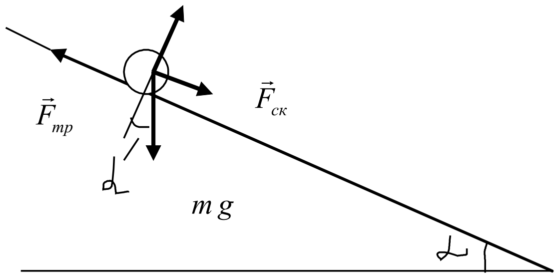


Рис. 1

Решение

В задаче одно тело и два неизвестных a и $F_{тр}$ (сила трения). Однако тело участвует в двух движениях – поступательном и вращательном. Расставим силы и запишем оба уравнения:

$$ma = mg \cdot \sin\alpha - F_{тр};$$

$$I\varepsilon = F_{тр} \cdot r\,.$$

Учтём, что $a = \varepsilon \cdot r$ (ε – угловое ускорение), $I = \dfrac{m\,r^2}{2}$ (r – радиус диска). Тогда второе уравнение примет вид:

$$\frac{mr^2a}{2\,r} = F_{тр} \cdot r,$$

или

$$F_{тр} = \frac{m a}{2}.$$

Подставив этот результат в первое уравнение, получим:

$$m\frac{2F_{тр}}{m} = m g \cdot \sin\alpha - F_{тр},$$

или

$$F_{тр} = \frac{m g \cdot \sin\alpha}{3}.$$

Задача 7. На горизонтальной поверхности находится клин массой m_2 с углом α (рис.1). На грань клина кладут брусок массой m_1. Найти ускорение клина и силы N и N_2, с которыми брусок давит на клин и клин давит на плоскость. Все поверхности соприкасающихся тел считать гладкими.

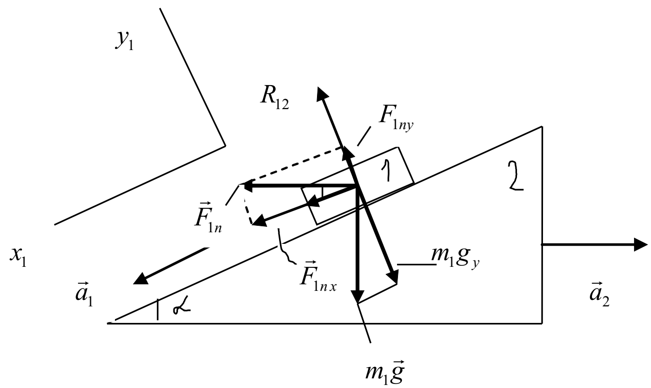


Рис. 1

Решение

Решим задачу с применением неинерциальной системы отсчёта.

Пусть a_1 – ускорение бруска в системе отсчёта, связанной с клином. Эта система отсчёта является неинерциальной, так как клин движется относительно Земли (ИСО) с ускорением a_x. На брусок кроме сил $m_1\vec{g}$ и $\vec{R}_{12}$ действует сила инерции:

$$\vec{F}_{in} = -m_1 a_2. \qquad (1)$$

Запишем уравнение движения бруска в системе отсчёта, связанной с клином, в векторной форме:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{R}_{12} + \vec{F}_{1n}. \qquad (2)$$

В проекциях на оси координат *OX* и *OY* уравнения движения принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &X_I:\ m_1 g\cdot\sin\alpha + m_1 a_2\cdot\cos\alpha \\ &Y_I: 0 = -m_1 g\cdot\cos\alpha + R + m_1 a_2\cdot\sin\alpha \end{aligned}\right\}. \qquad (3)$$

Рассматривая движение клина по-прежнему относительно Земли, приходим к следующим уравнениям:

$$X_2:\ m_2 a_x = R\cdot\sin\alpha\ ; \qquad (4)$$

$$Y_2: 0 = -m_2 g + R_2 - R\cdot\cos\alpha\ . \qquad (5)$$

Исключая *R* из уравнений (3) и (4), получаем:

$$R = \frac{m_2 a_2}{\sin\alpha}, \quad 0 = -m_1 g\cdot\cos\alpha + \frac{m_2 a_2}{\sin\alpha} + m_1 a_2\cdot\sin\alpha;$$

$$a_2 = \frac{m_1 g\cdot\sin 2\alpha}{2\left(m_2 + m_1\cdot\sin^2\alpha\right)}.$$

Анализ результатов:

а) пусть $m_2 >> m_1$ (очень тяжёлый клин). Тогда, $\frac{m_2}{m_1}\to\infty,\ a_2\to 0,$ т.е. неподвижен;

б) $m_1 >> m_2$ (тяжёлый брусок на очень лёгком клине), $\frac{m_2}{m_1}\to 0,\ a_2 = g\cdot\mathrm{ctg}\alpha$. Тяжёлый брусок практически свободно падает с ускорением *g* и вытесняет клин.

Задача 8. С какой силой следует прижать тормозную колодку к колесу, вращающемуся вокруг неподвижной оси (рис. 1) со скоростью $n = 30$ об/с, для его остановки в течение $t = 20\,\text{с}$? Массой втулки и спиц пренебречь и считать, что масса колеса $m = 10\,\text{кг}$ распределена по ободу, радиус обода $R = 0{,}1\,\text{м}$, коэффициент трения между колодкой и ободом $\mu = 0{,}5$.

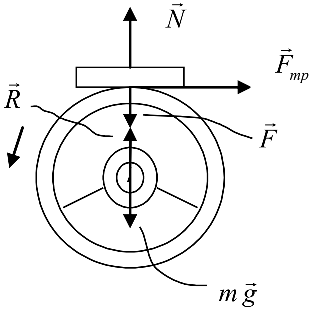


Рис. 1

Решение

Исходя из условия задачи, колесо и колодка – твёрдые тела. Свяжем ИСО с Землёй. Колодка действует на колесо с силой $\vec{F}_n$, на колодку действует равная $\vec{F}_n$ по абсолютному значению сила $\vec{N}$.

На колесо действует сила mg и равная ей по величине сила реакции оси *R,* а также сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Поскольку движется только колесо, для него запишем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$I\vec{\varepsilon} = M\,. \tag{1}$$

Направим ось перпендикулярно плоскости рисунка и на нас и спроецируем на неё (1). Тогда получим:

$$I\varepsilon = F_{тр} \cdot R. \tag{2}$$

Выразим входящие в (2) неизвестные величины через известные

$$I = mR^2 . \qquad (3)$$

Сила трения постоянна, поэтому колесо вращается равнозамедленно. Значит,

$$\omega_t = \omega_0 - \varepsilon t .$$

В момент остановки $\omega_t = 0$, тогда

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t} . \qquad (4)$$

Сила трения

$$F_{тр} = \mu F_n . \qquad (5)$$

Подставляя (3), (4) и (5) в (2), получим:

$$m R^2 \frac{2\pi n}{t} = \mu F_n \cdot R ,$$

откуда

$$F_n = \frac{2\pi n m \cdot R}{\mu \cdot t} = \frac{6{,}28 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 0{,}1}{0{,}5 \cdot 20} = 18{,}9\,\text{Н} .$$

Задача 9. Небольшая шайба *A* соскальзывает без трения с начальной скоростью, равной нулю, с вершины горки высотой *H*, имеющей горизонтальный трамплин (рис. 1). При какой высоте трамплина *h* шайба пролетит наибольшее расстояние *s*? Чему оно равно?

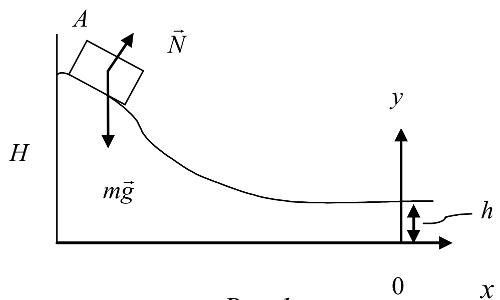


Рис. 1

Решение

Физическая система состоит из шайбы и Земли. Будем считать шайбу материальной точкой. Свяжем ИСО с Землёй и направим оси так, как это показано на рис. 1. Из условия задачи следует, что до отрыва с трамплина на шайбу действуют сила реакции опоры и сила тяжести, после отрыва – сила тяжести. Сила тяжести консервативна, поэтому в момент отрыва

$$\frac{mv^2}{2} = mg\left(H - h\right),$$

откуда

$$v = \sqrt{2g\left(H - h\right)}. \tag{1}$$

После отрыва шайба будет двигаться вдоль оси OX равномерно и прямолинейно, поэтому $x = v \cdot t$, а по оси Y – равноускоренно, поэтому

$$y = h - \frac{gt^2}{2}. \tag{2}$$

В момент приземления $x = s$, а $y = 0$. Тогда

$$\begin{cases} s = vt \\ h = \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}. \tag{3}$$

Решая совместно (1) и (3), получим:

$$s = 2\sqrt{h\left(H - h\right)}. \tag{4}$$

Высоту трамплина h определим из условия максимума функции $s\left(h\right)$, т.е.

$$\frac{ds}{dh} = \frac{H - 2h}{\sqrt{h\left(H - h\right)}} = 0, \tag{5}$$

откуда

$$h = \frac{H}{2}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получим:

$$s_{\max} = H.$$

Задача 10. Цепь массой $m = 1$ кг и длиной $\ell = 1,4$ м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом (рис. 1). После пережигания нити цепь упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

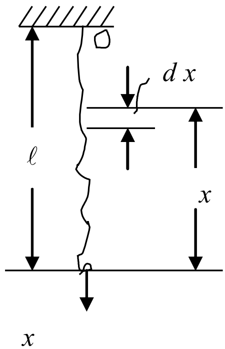


Рис. 1

Решение

Свяжем ИСО с Землёй и выберем одномерную систему координат с началом в точке подвеса цепи. Разобьём мысленно цепь на элементарные участки длиной dx и массой dm. Считая цепь однородным телом, для массы, приходящейся на единицу длины, получим $\tau = m / \ell$. Тогда масса элемента dx будет

$$dm = \tau \cdot dx = \frac{m}{\ell} dx. \qquad (1)$$

После пережигания нити физическая система «стол – цепь» становится незамкнутой вдоль оси *OX*. Поэтому полученный столом импульс равняется изменению импульса цепи.

Каждый элемент цепи при падении передаёт столу импульс

$$d\,p = v \cdot dm\,, \tag{2}$$

где v – скорость, приобретаемая элементом за время падения с высоты x. Так как цепь падает свободно, то

$$v = \sqrt{2gx}\,. \tag{3}$$

Подставляя (1) и (3) в (2), получим:

$$dp = \frac{m}{\ell}\sqrt{2gx}\,dx\,. \tag{4}$$

Интегрируя (4) в пределах от 0 до ℓ, найдём полный импульс, переданный столу:

$$p = \frac{m}{\ell}\sqrt{2g}\int_0^{\ell} x^{\frac{1}{2}} d\,x = \frac{2}{3}m\sqrt{2g\ell}\,.$$

Задача 11. Стержень движется вдоль линейки с некоторой постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов стержня одновременно в системе отсчёта, связанной с линейкой, то разность отсчётов по линейке $\Delta x_1 = 4{,}0$ м. Если же положение обоих концов зафиксировать в системе отсчёта, связанной со стержнем, то разность отсчётов по той же линейке $\Delta x_2 = 9{,}0$ м. Определить собственную длину ℓ_0 стержня и его скорость v относительно линейки.

Решение

Ясно, что в первом случае

$$\Delta x_1 = \ell_0\sqrt{1-\beta^2}\,, \tag{1}$$

где β – скорость стержня (в единицах скорости света). Во втором же случае ℓ_0 – это измеренная в системе отсчёта, связанной со стержнем, длина участка движущейся линейки, собственный размер которого (участка) равен Δx_2. Поэтому

$$\ell_0 = \Delta x_2 \sqrt{1-\beta^2}\ . \qquad (2)$$

Из (1) и (2) найдём:

$\ell_0 = \sqrt{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2} = 6$ м, $\beta = \sqrt{1 - \Delta x_1 / \Delta x_2} \approx 0{,}75$, или $v \approx 0{,}75$ c.

Задача 12. Две нестабильные частицы движутся в K-системе отсчёта по некоторой прямой в одном направлении с одинаковой скоростью $v = 0{,}99$ c. Расстояние между частицами в этой системе отсчёта $\ell = 12$ м. В некоторый момент обе частицы распались одновременно в K'-системе отсчёта, связанной с ними. Определить:

1) промежуток времени между моментами распада обеих частиц в исходной K-системе осчёта;

2) какая частица распалась позже в K-системе.

Решение

1. Пусть распад частицы, двигавшейся впереди – это событие 1, а распад частицы, двигавшейся сзади, – это событие 2. Тогда, согласно преобразованиям Лоренца (4.5) для времени,

$$t_1 - t_2 = \frac{\left(x_1' - x_2'\right) \cdot v / c^2}{\sqrt{1-\left(v/c\right)^2}}\ ,$$

где учтено, что $t_1' = t_2'$ – по условию. Разность $\left(x_1' - x_2'\right)$ – это собственное расстояние ℓ_0 между частицами. Оно равно $\ell_0 = \ell / \sqrt{1-\left(v/c\right)^2}$. Поэтому

$$t_1 - t_2 = \frac{\ell \cdot v / c^2}{1-\left(v/c\right)^2} = \frac{12 \cdot 0{,}99c / c^2}{1-\left(0{,}99c/c\right)^2} = 2 \text{ мкс.}$$

2. Так как $t_1 - t_2 > 0$, то $t_1 > t_2$. Другими словами, частица, двигавшаяся впереди, распалась раньше.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Яворский Б.М.* Курс физики / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Высш. шк., 1989. – 607 с.
2. *Мэрион Дж.Б.* Физика и физический мир. – М.: Мир, 1975. – 623 с.
3. *Орир Дж.* Физика: пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – Т. 1, 2. – 622 с.
4. *Савельев И.В.* Курс общей физики. – М.: Наука, 1982. – Т. 1. – 622 с.
5. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М.: Высш. шк., 2003. – 542 с.
6. *Иродов И.Е.* Основные законы механики. – М.: Высш. шк., 1985. – 248 с.
7. *Киттель Ч.* Берклеевский курс физики / Ч. Киттель, У. Найт, М. Руденман. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 479 с.
8. *Фриш С.Э.* Курс общей физики / С.Э. Фриш, А.В. Тиморева. – М.: Лань, 2006. – 470 с.
9. *Яворский Б.М.* Основы физики / Б.М. Яворский, А.А. Пинский. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 480 с.
10. *Суорц Кл.Э.* Необыкновенная физика обыкновенных явлений: пер. с англ. – М.: Наука, 1986. – Т. 1. – 398 с.
11. *Григорьев В.И.* Силы в природе / В.И. Григорьев, Г.Я. Мякишев. – М.: 1977. – 416 с.
12. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. – М.: Высш. шк., 1976. – 416 с.
13. *Касьянов В.А.* Физика. 10 класс. – М.: Дрофа, 2003. – 412 с.
14. *Лилли С.* Теория относительности для всех. – М.: Мир, 1984. – 502 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители:
Чечуев Владимир Яковлевич
Викулов Станислав Викторович
Дзю Искра Михайловна

ФИЗИКА

Элементы классической и релятивистской механики

Учебное пособие

Редактор Т. К. Коробкова
Компьютерная вёрстка Н. С. Пияр

Подписано в печать 22 октября 2012 г. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Объем 5,9 уч.-изд. л., 7,7 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Изд. № 92. Заказ № 641

Отпечатано в издательстве
Новосибирского государственного аграрного университета
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, каб.106.
Тел./факс (383) 267-09-10. E-mail: 2134539@mail.ru