НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

Высшая математика

Учебно-методическое пособие

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской федерации в качестве учебного пособия для студентов высших аграрных учебных заведений, обучающихся по инженерным специальностям

Второе издание, стереотипное

Новосибирск 2017

УДК 517.2
ББК 22.161.1
Д 50

Составители: М.В.Грунина, Р.Т.Бильданов, В.Н.Бабин, С.Н.Бурков

Рецензенты: С.П.Глушков, д-р тех. наук, проф.,
М.С.Соппа, д-р физ.-мат. наук, проф.

Высшая математика: учеб.-метод. пособие / сост.: М.В.Грунина, Р.Т.Бильданов, В.Н.Бабин, С.Н.Бурков; Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т – Новосибирск, 2017 – 297 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки, реализуемых в ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

© Новосибирский государственный аграрный университет, 2017

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики, изучаемый в высших учебных заведения, часто называют «курс высшей математики». Разделы математики, изучаемые в средней школе, принято объединять под общим названием «курс элементарной математики». Границы между «высшей» и «элементарной» весьма размыты, но можно сказать, что в основе курса «высшей» математики лежат разделы, появившиеся в XVII и XVIII вв. в связи с развитием науки и техники.

Изучение *алгебры* началось в Западной Европе в XIII в. Одним из крупных математиков этого времени был итальянец Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (ок.1170 – после 1228). Его “Книга абака” (1202) – трактат, который содержал сведения об арифметике и алгебре до квадратных уравнений включительно. Особенно далеко было продвинуто в XVIII в. решение систем линейных уравнений – для них были получены формулы, позволяющие выразить решения через коэффициенты и свободные члены. Дальнейшее изучение таких систем уравнений привело к созданию теории матриц и определителей.

Математический анализ – значительный раздел «высшей математики» – занимается изучением *взаимосвязи переменных величин*. Величиной называется всё то, что может быть измерено и выражено числом. Величина называется *переменной*, если она принимает различные численные значения. Величина, сохраняющая одно и то же значение, называется *постоянной*. Задачей математического анализа является изучение функциональных зависимостей между переменными, вне зависимости от физического смысла рассматриваемых величин.

Предметом *теории вероятностей* является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий. Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяют предвидеть, как эти события будут протекать.

Математика продолжает развиваться, появляются новые разделы. Появление новых областей математики обусловлено потребностями познания мира. Части каждого раздела постепенно проникают одна в другую, обогащаются собственными приложениями. И вся эта динамичная система образует современную математику!

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Матрицы и действия над ними

Определение 1. Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица из $m \times n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах.

Обозначаются матрицы, как правило, большими буквами A, B, C,..., или подробно

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}.$$

Числа a_{ij}, образующие матрицу, называются элементами матрицы. При этом первый индекс (i) обозначает номер строки, а второй (j) – номер столбца, в которых расположен элемент a_{ij}. Так, a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца матрицы A.

Рассмотрим некоторые примеры матриц.

1. Квадратная матрица**.** Матрица размерности $n \times n$ называется квадратной матрицей порядка n. Общий вид квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}.$$

2. Матрица-строка:

$$A = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n).$$

3. Матрица-столбец:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

4. Треугольная матрица – это квадратная матрица, у которой элементы, расположенные под диагональю (или над диагональю), равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Единичная матрица – это квадратная матрица, по главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

6. Нуль-матрица – это матрица, все элементы которой равны нулю.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 2. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются **равными** (обозначается равенство $A = B$), если их размерности совпадают и соответствующие элементы равны, т.е. при любых i, j $a_{ij} = b_{ij}$.

Определение 3. Суммой двух матриц $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одной размерности называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ той же размерности (обозначается $C = A + B$), элементы которой определяются равенствами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

Определение 4. Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на число λ называется матрица $B = \left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, элементы которой определяются равенствами

$$b_{ij} = \lambda\cdot a_{ij},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются линейными операциями над матрицами и обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$ (переместительный закон);

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (сочетательный закон);

3) $A + 0 = A$;

4) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$;

$$\left.\begin{array}{l} 5)(\alpha+\beta)\cdot A = \alpha\cdot A + \beta\cdot A \\ 6)(A+B)\cdot\alpha = \alpha\cdot A + \alpha\cdot B \end{array}\right\} \text{распределительный закон.}$$

Рассмотрим прямоугольные матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$ такие, что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, и определим для них операцию умножения.

Определение 5. Произведением матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на матрицу $B = \left(b_{jk}\right)_{n\times p}$ называется матрица $C = \left(c_{ik}\right)_{m\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ik} = \underline{a}_i \cdot \overline{b}_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk},$$

где $\underline{a}_i$ – i-я строка матрицы A; $\overline{b}_k$ – k-й столбец матрицы B.

Замечание. Размерность произведения матриц можно определить по правилу, которое в дальнейшем будем называть правилом умножения размерностей

$$(m\times n) \cdot (n\times p) = (m\times p).$$

Свойства умножения матриц

Свойство 1. Произведение матриц, вообще говоря, неперестановочно (некоммутативно), т.е.

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Свойство 2. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Свойство 3. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Свойство 4. Для квадратной матрицы A

$A \cdot E = E \cdot A = A$, где E – единичная матрица.

Пример 1. Найти произведение матриц $A \cdot B$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2\cdot(-4)+(-1)\cdot 2+3\cdot 5 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-3) \\ 0\cdot(-4)+4\cdot 2+(-2)\cdot 5 & 0\cdot(-1)+4\cdot 1+(-2)\cdot 1 & 0\cdot 0+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-3) \\ 3\cdot(-4)+(-2)\cdot 2+1\cdot 5 & 3\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+1\cdot 1 & 3\cdot 0+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -2 & 2 & 2 \\ -11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A{\cdot}B$, где

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot(-1) \\ 5\cdot 4-1\cdot 3+0\cdot(-1) \\ -7\cdot 4+2\cdot 3+1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

§2. Определители и их свойства

Каждой квадратной матрице можно сопоставить число, которое называется ее определителем или детерминантом. Определитель матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ обозначается символами $det\, A$, $|A|$, ΔA или записывается через элементы матрицы в виде

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Элементы матрицы a_{ij} (i, j = 1,...,n) называются элементами определителя, а порядок матрицы n называется порядком определителя.

Определение 1. Определителем второго порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице второго порядка и находится по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определение 2. Определителем третьего порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице третьего порядка и находится по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}$$

Определители второго порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называются минорами элементов a_{11}, a_{12}, a_{13} определителя.

Определение 3. Минором M_{ij} определителя n-го порядка называется определитель порядка (n-1), полученный из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij}, взятый со знаком (+) или (–), который определяется по правилу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Таким образом, определитель третьего порядка запишется в виде

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}. \qquad (1)$$

Это правило называется разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Замечание 1. Можно вычислить определитель, раскладывая его по элементам любой строки или столбца.

Пример 3. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение: Найдём алгебраические дополнения, например, к элементам первой строки.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 35 = -32,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(18 + 14) = -32,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 2 = 32.$$

По формуле (1) получим

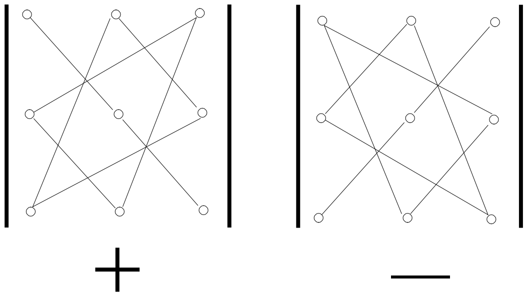
$|A| = 2\cdot(-32) - 4\cdot(-32) + 1\cdot 32 = 96$.

Замечание 2. Раскроем определители второго порядка в формуле (1) и объединим члены, входящие со знаком (+) и (–). Тогда для вычисления определителя третьего порядка получим следующее правило:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}. \qquad (2)$$

Заметим, что первое слагаемое, входящее в правую часть этой формулы со знаком (+), есть произведение элементов главной диагонали матрицы A, а каждое из двух других – произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы. Слагаемые, входящие в формулу (2) со знаком (–), строятся таким же образом, но относительно второй (побочной) диагонали. Это правило вычисления определителя третьего порядка называется правилом треугольника или правилом Саррюса и может быть схематично изображено в следующем виде:



Пример 4. Вычислить определитель с помощью правила треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot6\cdot5 + 4\cdot(-7)\cdot3 - 3\cdot(-1)\cdot6 -$$

$$- 5\cdot(-7)\cdot1 - 2\cdot4\cdot(-2) = 2 + 60 - 84 + 18 + 35 + 16 = 47$$

Определение 5. Определителем n-го порядка, соответствующим матрице $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, назовем число, которое находится по следующему правилу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots + a_{in}\cdot A_{in}.$$

Замечание 3. Вычислять определитель также можно, раскладывая его по элементам любого столбца или строки.

Свойства определителей

Свойство 1. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.

Свойство 2. Общий множитель какой-либо строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Свойство 3. Если в определителе две строки (или два столбца) пропорциональны (в частности, равны), то определитель равен нулю.

Свойство 4. При замене всех строк определителя на столбцы с теми же номерами величина его не изменится.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) нули, то определитель равен нулю .

Свойство 6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Свойство 7. Сумма попарных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

§3. Обратная матрица

Определение 1. Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля.

Определение 2. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если их произведение равно единичной матрице

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

Теорема. Для существования матрицы A^{-1} для матрицы A необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденная.

Обратная матрица для n=3 находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения.

§4. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы

Определение 1. К элементарным преобразованиям строк относятся следующие преобразования:

1. Умножение всех элементов какой-либо строки матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.
2. Перестановка строк местами.
3. Прибавление к элементам какой-либо строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.
4. Отбрасывание строк матрицы, все элементы которых равны нулю.

Всякая матрица элементарными преобразованиями строк может быть приведена к одному из видов:

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Рационально проводить элементарные преобразования по следующей схеме :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & .. & * \\ * & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. \\ * & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & .. & * \\ 0 & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & * & .. & * \\ 0 & 1 & * & .. & * \\ 0 & 0 & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & ..* \\ 0 & 1 & * & * & ..* \\ .. & .. & .. & .. & .... \\ 0 & .. & 1 & * & ..* \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & * & * & .. & 0 & * & .. & * \\ 0 & 1 & * & .. & 0 & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 1 & 0 & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 & * & .. & * \\ 0 & 1 & 0 & .. & 0 & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 1 & 0 & * & .. & * \end{pmatrix}$$

Определение 2. Число ненулевых строк, оставшихся в матрице после элементарных преобразований строк по вышеприведённой схеме, называется рангом матрицы.

Определение 3. Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из другой получаются с помощью элементарных преобразований 1-3. Обозначаются $A \sim B$.

§5. Решение систем линейных уравнений

Определение 1. Система линейных уравнений называется Крамеровской, если в ней число уравнений равно числу неизвестных. При $n=3$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_{13} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_{13} = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_{13} = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

a_{ij} называются коэффициентами при неизвестных, b_1, b_2, b_3 – свободными членами.

Определение 2. Решением системы (1) называется совокупность чисел (x_1; x_2; x_3), при подстановке которых в (1) все уравнения обращаются в тождества.

Определение 3. Система линейных уравнений называется несовместной, если у нее нет ни одного решения.

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений

Для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера нужно вычислить определители Δ, Δx_1, Δx_2, Δx_3, где Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, Δx_1, Δx_2, Δx_3 получены из Δ заменой столбцов коэффициентов при x_1, x_2, x_3 соответственно на столбец свободных членов. При этом, если 1) $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \text{ и } x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta};$$

2) $\Delta=\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=0$, система несовместна или имеет бесконечное множество решений; 3) $\Delta=0$ и хотя бы один из Δx_1, Δx_2, Δx_3 отличен от нуля, система несовместна.

Матричная запись системы линейных уравнений (1) и ее матричное решение

Пусть A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, B – столбец свободных членов и X – матрица столбец неизвестных, тогда

$A \cdot X = B$ – матричная запись системы уравнений, а

$X = A^{-1} \cdot B$ – ее матричное решение .

Пример 5. Систему линейных уравнений записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31 \\ 4x_1 + 11x_3 = -43 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20 \end{cases}$$

Решение: Пусть A – матрица, составленная из коэффициентов, стоящих при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 31 \\ -43 \\ -20 \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных.

В таких обозначениях исходную систему линейных уравнений перепишем в матричной форме $A \cdot X = B$. Домножим последнее равенство на A^{-1} слева, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,

т.е. $X = A^{-1} \cdot B$.

Найдем матрицу A^{-1}.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 11 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -33, \ A_{21} = -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 20, \ A_{31} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 11 \end{vmatrix} = -55,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6, \ A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 28, \ A_{32} = -\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = -77,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -31, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 20.$$

Определитель $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$,

$|A| = 7 \cdot (-33) + (-5) \cdot 6 + 0 \cdot 12 = -261$.

Итак, $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -\frac{1}{261} \begin{pmatrix} -33 & 20 & -55 \\ 6 & 28 & -77 \\ 12 & -31 & 20 \end{pmatrix}.$$

Найдем столбец неизвестных

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{261} \begin{pmatrix} -33 & 20 & -55 \\ 6 & 28 & -77 \\ 12 & -31 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 31 \\ -43 \\ -20 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{261} \begin{pmatrix} -33 \cdot 31 + 20 \cdot (-43) - 55 \cdot (-20) \\ 6 \cdot 31 + 28 \cdot (-43) - 77 \cdot (-20) \\ 12 \cdot 31 - 31 \cdot (-43) + 20 \cdot (-20) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{261} \begin{pmatrix} -783 \\ 522 \\ 1305 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -5$.

Ответ: (3; –2; –5).

Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса, в отличие от двух предыдущих методов, применим для любых систем, где число неизвестных необязательно равно числу уравнений. Под расширенной матрицей системы будем понимать матрицу, включающую в себя столбец свободных членов (после черты). В результате элементарных преобразований строк расширенная матрица приводится к одному из трех случаев:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & .. & 0 & * \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & * & * \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cccccc|c} * & .. & 0 & * & .. & * & * \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & * & * & .. & * & * \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} * & .. & 0 & * \\ 0 & .. & * & .. \\ 0 & .. & 0 & * \end{array}\right)$$

I II III

В первом случае система имеет единственное решение. Во втором случае система уравнений имеет бесконечное множество решений и в третьем она несовместна.

Теорема Кронекера-Капелли:

Для того, чтобы система уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

При этом:

1) если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;

2) если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Если ранг матрицы системы меньше ранга расширенной матрицы, то система несовместна и решения не существует.

Нетрудно видеть, что на последнем рисунке в первом случае $r = r_1 = n$, во втором – $r_1 = r < n$ и в третьем $r > r_1$, где r – ранг расширенной матрицы; r_1 – ранг матрицы системы и n – число неизвестных.

Пример 6.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Решение: Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right)(-2)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 18 & 32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right)(-4) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 58 & 116 \end{array}\right):58 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -18 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)(18)(-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (8; 4; 2).

Пример 7.

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}.$$

Решение: Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)(-5)(-6) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & -10 & -14 \\ 0 & 12 & -10 & -16 \end{array}\right)(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 12 & 10 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Число ненулевых строк в расширенной матрице равно трем, а в матрице системы (без столбца свободных членов) – двум.

$r = 3$, $r_1 = 2$, $r > r_1$, значит, система несовместна.

Ответ: Система несовместна.

Глава 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

§1. Векторы. Линейные операции над векторами

Коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой.

Обозначения:

$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ – векторы сонаправлены;

$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c}$ – векторы противоположно направлены;

$\overline{a} \,||\, \overline{b}$ – в общем случае (без указания взаимной направленности).

Равные векторы – векторы, удовлетворяющие условиям :

1) имеют одинаковую длину;

2) коллинеарны;

3) сонаправлены.

Компланарные векторы – векторы, параллельные одной плоскости.

Сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по правилу треугольника или параллелограмма.

Обозначение суммы: $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ или $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\overline{b}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$ при $\lambda > 0$ и $\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{a}$ при $\lambda < 0$. Обозначение $\overline{b} = \lambda\cdot\overline{a}$.

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Два упорядоченных неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют базис на плоскости.

Три упорядоченных некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис в пространстве.

Базис называется ортонормированным (декартовым), если базисные векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначение декартова базиса: $\overline{i}$, $\overline{j}$ – на плоскости; $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – в пространстве.

Разложить вектор по базису – значит представить его в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е. в форме

$\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ – на плоскости или $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$ – в пространстве.

Числа α, β, γ (коэффициенты линейной комбинации) называются координатами вектора в данном базисе. Вектор может быть задан в координатной форме: $\overline{a} = \{\alpha, \beta\}$ – на плоскости; $\overline{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ – в пространстве.

Линейным операциям над векторами соответствуют те же линейные операции над их координатами.

$$\overline{a} = \{a_1, a_2, a_3\};\ \overline{b} = \{b_1, b_2, b_3\};$$

$$\overline{a} + \overline{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\};$$

$$\lambda\overline{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}.$$

Если даны координаты начала A и координаты конца B вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overline{a} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Условия коллинеарности и компланарности векторов в координатной форме:

1. $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \lambda\overline{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

(координаты коллинеарных векторов пропорциональны);

2. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

(определитель третьего порядка, составленный из координат компланарных векторов, равен 0).

Пример 1. Даны векторы $\overline{a}_1 = \{1; 2; -1\}$, $\overline{a}_2 = \{1; 1; 2\}$, $\overline{a}_3 = \{2; 1; 3\}$ и $\overline{b} = \{3; 6; 1\}$. Показать, что векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

Решение: Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 1\cdot 1 - 2\cdot(-1) - 1\cdot(-1) = 4.$

Так как $\Delta \neq 0$, векторы $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3$ некомпланарны и, следовательно, образуют базис. Разложим вектор $\overline{b}$ по базису.

$$\overline{b} = x\cdot\overline{a}_1 + y\cdot\overline{a}_2 + z\cdot\overline{a}_3,$$

где x, y, z – искомые координаты вектора $\overline{b}$ в базисе $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2,\ \overline{a}_3$.

Записав координаты векторов $\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3,\ \overline{b}$ в столбцы, представим разложение вектора $\overline{b}$ в виде

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Приравняв координаты векторов, стоящих в правой и левой частях равенства, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 6 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

Решаем систему уравнений, например, методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (-2)(1) \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ (3) \\ \\ \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ :(-1) \\ :(-4) \end{array} \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(-3)(-2) \sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(-1) \sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Итак, $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$.

Следовательно, $\overline{b} = 2\overline{a}_1 + 3\overline{a}_2 - \overline{a}_3$.

§2. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Обозначение $\overline{a}\cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi$.

Если векторы заданы координатами в декартовом базисе $\overline{a} = \left\{a_x, a_y, a_z\right\}$, $\overline{b} = \left\{b_x, b_y, b_z\right\}$, то скалярное произведение векторов равно сумме произведений их координат

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

С помощью скалярного произведения находят:

– длину вектора

$$|\,\overline{a}\,| = \sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

– расстояние между двумя точками

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

– косинус угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|} = \frac{a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos\varphi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0, \ (\left|\overline{a}\right| \neq 0, \quad \left|\overline{b}\right| \neq 0).$$

§3. Векторное произведение

Векторным произведением $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$ такой, что

1) $\left|\overline{c}\right| = \cdot\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\varphi$ – модуль $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (S);

2) $\overline{c} \perp \overline{a}, \ \overline{c} \perp \overline{b}$;

3) тройка векторов $\overline{a}, \ \overline{b}, \ \overline{c}$ – правая.

Обозначение $\overline{c} = \left[\overline{a}, \ \overline{b}\right]$ или $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Координаты вектора $\overline{c} = \left\{c_x, c_y, c_z\right\}$ $\overline{c}$ = (c_x, c_y, c_z) в декартовом базисе вычисляются по формулам:

$$\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \overline{k}$$

§4. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов называется число

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Абсолютная величина смешанного произведения $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a},\overline{b},\ \overline{c}$.

$$V=\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|=\pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

§5. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ на плоскости:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

2. Деление отрезка в данном отношении λ. Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Координаты точки $N(x,y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\dfrac{M_1N}{NM_2}=\lambda$, определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при делении пополам, т.е. $\lambda = 1$, имеем

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

3. Основные виды уравнений прямой на плоскости:

а) общее уравнение прямой:

l: $Ax + By + C = 0$,

$\overline{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой, $\overline{n} \perp l$;

б) уравнение прямой с угловым коэффициентом

l: $y = kx + b$, k – угловой коэффициент, равный тангенсу угла α, который образует прямая с положительным направлением оси Ox, $\left|b\right|$ – величина отрезка, отсекаемая прямой по оси Oy;

в) уравнение прямой в отрезках

l: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

$|\,a\,|$ и $|\,b\,|$ – длины отрезков, отсекаемых на осях Ox и Oy соответственно;

г) уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$

$$l\text{: } \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

д) уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ в данном направлении

l: $y - y_0 = k\cdot(x - x_0)$, k – угловой коэффициент;

4. Взаимное расположение двух прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

а) угол между прямыми:

$\text{tg}\,\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты этих прямых; φ – угол, на который нужно повернуть первую прямую против часовой стрелки до совпадения со второй прямой;

б) признак параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$;

в) признак перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

5. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пример 1. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-1, 2)$, $B(3, 8)$, $C(7, 4)$. Найти: 1) систему неравенств, определяющих множество точек треугольника ABC; 2) угол B в радианах с точностью до двух знаков; 3) уравнение высоты AD и ее длину; 4) уравнение медианы BE и координаты точки F пересечения этой медианы с высотой AD; 5) уравнение окружности, для которой высота AD есть диаметр.

Решение.

1. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, для которых она является общей границей. Если граница определяется уравнением $ax + by + c = 0$, то полуплоскости определяются неравенствами:

$ax + by + c \le 0$ и $ax + by + c \ge 0$.

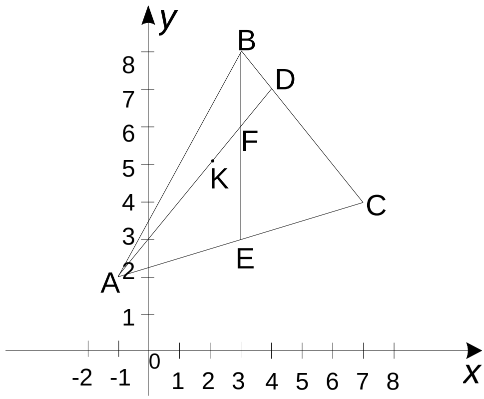


Рис. 1

Выбрав произвольную точку M, не принадлежащую границе, подставим ее координаты в одно из данных неравенств; если неравенство удовлетворяется, то оно определяет полуплоскость, содержащую точку M, а если не удовлетворяется, то полуплоскость, не содержащую точку M. Очевидно, множество точек треугольника ABC можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей, из которых первая ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, третья ограничена прямой CA и содержит точку B.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (*)$$

Отсюда уравнения прямых AB, BC, CA:

$$\frac{y-2}{8-2}=\frac{x+1}{3+1};\ \ \frac{y-2}{6}=\frac{x+1}{4};\ 2y-3x-7=0\ \ (AB)$$

$$\frac{y-8}{4-8}=\frac{x-3}{7-3};\ \ \frac{y-8}{-4}=\frac{x-3}{4};\ y+x-11=0\quad (BC)$$

$$\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-7}{-1-7};\ \ \frac{y-4}{-2}=\frac{x-7}{-8};\ 4y-x-9=0\ (CA)$$

Подставляя в левую часть уравнения AB координаты точки C, получим $2\cdot 4-3\cdot 7-7<0$. Следовательно, первое искомое неравенство, которое определяет полуплоскость, ограниченную прямой AB и содержащую точку C, будет $2x - 3y - 7 \le 0$.

Аналогично, вторая полуплоскость определяется неравенством $y + x - 11 \le 0$, а третья – неравенством $4y - x - 9 \ge 0$.

Итак, множество точек треугольника ABC определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 2y-3x-7\le 0, \\ y+x-11\le 0, \\ 4y-x-9\ge 0. \end{cases}.$$

2. Решая уравнение прямой относительно y, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом. В нашем случае $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ (AB), $y = -x + 11$ (BC), откуда $k_{AB} = \frac{3}{2}$, $k_{BC} = -1$.

Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми с угловым коэффициентом k_1 и k_2 определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

По рис.1 видно, что угол B – это угол, на который нужно повернуть прямую AB до прямой BC против часовой стрелки. Отсюда $k_1 = k_{AB} = \frac{3}{2}$, $k_2 = k_{BC} = -1$. Находим тангенс угла B:

$$\operatorname{tg} \angle B = \frac{-1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot (-1)} = 5, \quad \angle B = \operatorname{arctg} 5 \approx 1{,}37 .$$

3. Ранее было найдено, что $k_{BC} = -1$. Отсюда $k_{DA} = 1$. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид $y - y_1 = k \cdot (x - x_1)$.

Подставив в это уравнение координаты точки A и найденный угловой коэффициент высоты, получим уравнение прямой AD:

$y - 2 = 1 \cdot (x + 1)$, или $y = x + 3$.

Длину высоты AD найдем как расстояние от точки A до прямой BC по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

За (x_0, y_0) возьмем координаты точки A,
а $ax + by + c = 0$ – уравнение прямой BC. Вычислим:

$$|AD| = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

4. Чтобы найти уравнение медианы *BE*, определим сначала координаты точки *E*, которая является серединой стороны *AC*. Воспользуемся формулой деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Имеем $x_E = \frac{-1+7}{2} = 3$, $y_E = \frac{2+4}{2} = 3$, т.е. *E*(3, 3).

Подставив в (*) координаты точек *B* и *E*, находим уравнение медианы:

$$\frac{y-3}{8-3} = \frac{x-3}{3-3}, \text{ или } x - 3 = 0.$$

Чтобы найти координаты точки *F* пересечения медианы *BE* с высотой *AD*, решаем систему их уравнений:

$$\begin{cases} x - 3 = 0 \\ y - x - 3 = 0 \end{cases}$$

Отсюда: $x = 3$, $y = 6$, т.е. *F*(3, 6).

5. Так как | *AD* | – это диаметр, то радиус искомой окружности равен $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Найдем координаты точки *D*, как пересечение прямых *AD* и *BC*.

$$\begin{array}{l} AD \\ BC \end{array}\begin{cases} y = x + 3 \\ y + x - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ 0 = 2x - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 4 \end{cases}$$

Пусть *K* – центр искомой окружности, *K* является серединой отрезка *AD*, находим координаты точки *K* :

$$x_K = \frac{x_A + x_D}{2}, \qquad y_K = \frac{y_A + y_D}{2},$$

$$x_K = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_K = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}.$$

Уравнение окружности с центром в точке $K(x_0,\ y_0)$ радиуса r имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Таким образом, уравнение искомой окружности

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

Пример 2. В треугольнике *ABC* с вершинами $A(9,\ 3)$, $B(-7,\ -9)$, $C(0,\ 15)$ найти уравнение биссектрисы *BN*.

Решение. Чтобы найти уравнение биссектрисы *BN*, найдём длины сторон BC и BA по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$$|BC| = \sqrt{(0+7)^2 + (15+9)^2} = 25$$

$$|BA| = \sqrt{(9+7)^2 + (3+9)^2} = 20$$

По известному из школы свойству биссектрисы $\frac{BC}{BA} = \frac{CN}{NA} = \lambda$; $\lambda = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$.

Найдём координаты точки *N*, как точки, делящей отрезок *AC* в соотношении λ

$$x_N=\frac{x_C+\lambda x_A}{1+\lambda}=\frac{0+\frac{5}{4}\cdot 9}{1+\frac{5}{4}}=5,$$

$$y_N=\frac{y_C+\lambda y_A}{1+\lambda}=\frac{15+\frac{5}{4}\cdot 3}{1+\frac{5}{4}}=\frac{25}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки B и N:

$\frac{x+7}{5+7}=\frac{y+9}{\frac{25}{3}+9}$, или $13x-9y+10=0$ уравнение биссектрисы BN.

§6. Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнение плоскости Q, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=\{A, B, C\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$\overline{n}$ называется нормальным вектором плоскости.

Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Для двух плоскостей, заданных уравнениями

Q_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и Q_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

1) Условие параллельности

$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

2) Условие перпендикулярности

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$

3) Угол между плоскостями

$$\cos(Q_1 \hat{\ } Q_2) = \cos(\overline{N_1 \hat{\ } N_2}) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Прямая L в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей:

$$L: \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0. \end{cases}$$ – общие уравнения прямой.

Уравнения прямой L, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\overline{s} = \{m, n, p\}$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$ – называются каноническими уравнениями прямой. Вектор $\overline{s}$ называется направляющим вектором прямой.

Замечание. Канонические уравнения прямой имеют смысл и в том случае, когда одна или две координаты направляющего вектора обращаются в нуль.

Для двух прямых, заданных каноническими уравнениями,

$$L_1: \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } L_2: \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

1. Условие параллельности

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \parallel \overline{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

2. Условие перпендикулярности

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \perp \bar{s}_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$$

3. Угол между ними

$$\cos(L_1 \hat{} L_2) = \cos(\bar{s}_1 \hat{} \bar{s}_2) = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Для плоскости Q: $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямой L: $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$.

1. Условие параллельности

$$Q \parallel L \Leftrightarrow \bar{n} \perp \bar{s} \Leftrightarrow A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0$$

2. Условие перпендикулярности

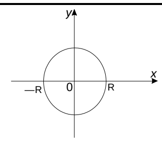
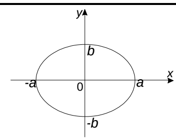
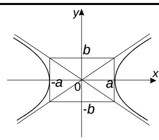
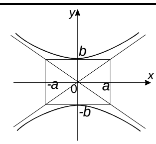
$$\mathrm{Q} \perp \mathrm{L} \Leftrightarrow \bar{n} \parallel \bar{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

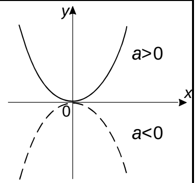
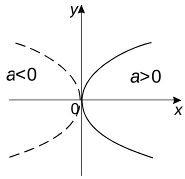
3. Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + + Cz + D = 0$ находяит по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

§7. Канонические уравнения кривых второго порядка

Приведем канонические (простейшие) уравнения кривых второго порядка и их графики в виде следующей таблицы.

№ п/п	Название кривой	Уравнение кривой	График кривой
1	2	3	4
1	Окруж-ность	$x^2+y^2=R^2$ R – радиус окружности (центр в начале координат)	
2	Эллипс	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ a, b – полуоси эллипса (центр в начале координат)	
3	Гипер-бола	а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ a, b – полуоси гиперболы (a – вещественная, b – мнимая)	
		центр в начале координат	
		б) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ a, b – полуоси гиперболы (a – мнимая, b – вещественная)	

1	2	3	4
4	Парабола	а) $y = ax^2$ Вершина в начале координат	
		б) $x = ay^2$	

Уравнения кривых второго порядка с центром или вершиной (для параболы) в точке $C(x_0, y_0)$, не совпадающей в общем случае с началом координат без поворота осей относительно начала координат, имеют вид:

1. $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ – окружность;

2. $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – эллипс;

3. а) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$,

б) $-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – гиперболы;

4. а) $y - y_0 = a\,(x - x_0)^2$, б) $x - x_0 = a\,(y - y_0)^2$ – параболы.

Пример 3. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(1, 4)$ и прямой $y = 2$.

Полученное уравнение привести к простейшему виду. Сделать чертеж.

Решение: Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $y = 2$. Тогда абсцисса точки B равна абсциссе точки M, ордината точки B равна 2, т.е. $B(x, 2)$. В силу условий задачи $|AM| = |MB|$. Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-2)^2}$$

Отсюда

$$(x-1)^2+(y-4)^2=(x-x)^2+(y-2)^2$$

$$(x-1)^2+y^2-8y+16=y^2-4y+4$$

$$(x-1)^2=4y-12$$

$$y-3=\frac{1}{4}\cdot(x-1)^2$$

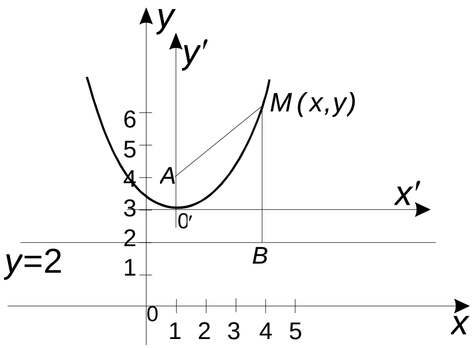


Рис.2

Последнее уравнение определяет параболу с вершиной в точке $O'(1, 3)$. Чтобы уравнение привести к простейшему виду, положим $x' = x–1$, $y' = y–3$. Тогда уравнение примет вид

$$y' = \frac{1}{4} \cdot x'^2$$

Простейший способ построения параболы на чертеже состоит в следующем. Вводим новую систему координат $x'O'y'$ с началом в точке O' и осями, параллельными осям Ox и Oy, и затем строим в новой системе параболу $y' = \frac{1}{4} \cdot x'^2$ (рис. 2).

Пример 4. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $F(1, 0)$ и прямой $x = 4$ равно $\frac{1}{2}$. Сделать чертеж.

Решение: Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $x = 4$. Тогда абсцисса точки B равна 4, ордината равна ординате точки M, т.е. $B(4, y)$.

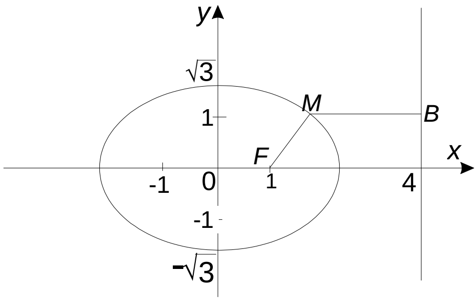


Рис.3

В силу условий $|FM| = \frac{1}{2}|MB|$. Следовательно,

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2 + (y-y)^2}$. Отсюда

$$(x-1)^2+y^2=\frac{1}{4}(x-4)^2$$

$$y^2+x^2-2x+1=\frac{1}{4}x^2-2x+4$$

$$\frac{3}{4}x^2+y^2=3$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

Последнее уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, где $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1$, т.е. $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ (рис. 3).

Пример 5. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $F(-4, 0)$ и до прямой $x = -1$ равно 2. Сделать чертеж.

Решение: Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $x = -1$. Тогда абсцисса точки B равна -1, ордината равна ординате точки M, т.е. $B(-1, y)$. В силу условий $|FM| = 2\cdot|MB|$.

Следовательно, $\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}=2\sqrt{(x+1)^2+(y-y)^2}$.

Отсюда $(x + 4)^2 + y^2 = 4\cdot(x + 1)^2$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$3x^2 - y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$$

Полученное уравнение определяет гиперболу, у которой $a = 2$, $b = 2\sqrt{3}$. Фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$, т.е. $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$. Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a} = 2$.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$, т.е. в нашем случае $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}x$ (рис. 4).

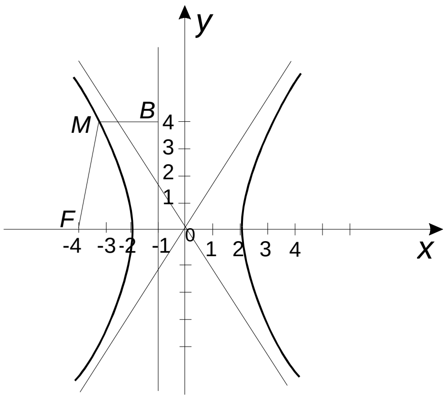


Рис.4

Глава 3. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§1. Предел. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Основные определения и теоремы

Определение 1. Функция, областью определения которой служит множество всех натуральных чисел, называется последовательностью.

Такие функции принято кратко записывать $y_n = f(n)$, $n \in \mathbf{N}$.

Последовательность считается заданной, если задан ее общий член y_n.

Определение 2. Число a называется пределом последовательности $y_n = f(n)$, если для любого положительного числа ε существует такое число N, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполнено неравенство

$| f(n) - a | < \varepsilon$ или, что то же самое, $| y_n - a | < \varepsilon$.

Тот факт, что a есть предел последовательности y_n, символически записывается так: $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = a$ или $y_n \to a$ при $n \to \infty$.

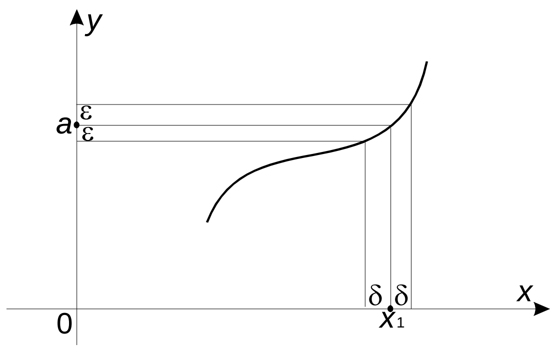


Рис.5

Определение 3. Число a называется пределом функции $f(x)$ в точке x_1, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такую δ-окрестность точки x_1, что как только $|\, x - x_1 \,| < \delta$ $(x \neq x_1)$, то $|\, f(x) - a \,| < \varepsilon$.
Это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = a$ или $f(x) \to a$ $(x \to x_1)$ и графически иллюстрируют так, как это показано на рис. 5.

Замечание 1. Если $f(x)$ стремится к пределу a_1 при x, стремящемуся к некоторому числу так, что x принимает только значения, меньшие x_1, то пишут $\lim\limits_{x \to x_1 - 0} f(x) = a_1$ и называют a_1 пределом функции $f(x)$ в точке x_1 слева. Если x принимает только значения, больше чем x_1, то пишут $\lim\limits_{x \to x_1 + 0} f(x) = a_2$ и называют a_2 пределом функции $f(x)$ в точке x_1 справа.

Если пределы слева и справа существуют и равны, т.е. $a_1 = a_2 = a$, то a и будет пределом. И обратно, если существует предел функции a в точке x_1, то существуют пределы функции в точке x_1 слева и справа и они равны.

Определение 4. Функция $f(x)$ стремится к пределу a при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|\, x \,| > N$, выполняется неравенство $|\, f(x) - a \,| < \varepsilon$. Графически это показано на рис.6.

Определение 5. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_1$, или при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to x_1} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

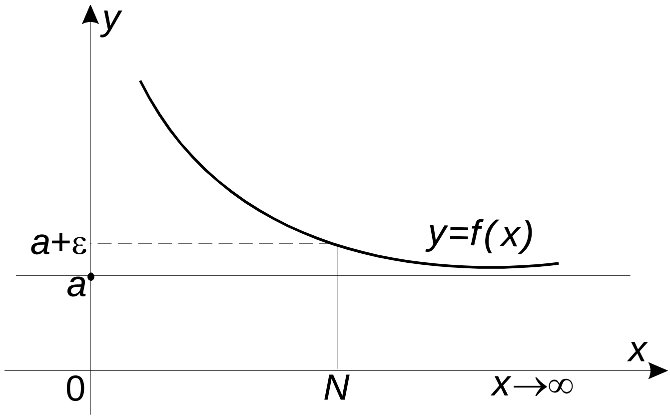


Рис.6

Определение 6. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_1$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = \infty$, если для любого $M > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $| f(x) | > M$ $\forall x \in (x_1 - \delta;\ x_1 + \delta)$.

Определение 7. Переменная величина y называется ограниченной, если можно указать такое число $M > 0$, что $y \leq | M |$. В частности, функция $y = f(x)$ ограничена в интервале (a, b), если найдется постоянное число $M > 0$ такое, что $| f(x) | < M$ для любого x, удовлетворяющего неравенству $a < x < b$. Если для переменной величины нельзя указать числа M, ограничивающего ее, то говорят: переменная величина неограниченная.

Основные теоремы

Теорема 1. Для того, чтобы функция $y = f(x)$ в точке $x = x_1$ имела пределом число a, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в окрестности этой точки в виде суммы $f(x) = a + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция в окрестности точки $x = x_1$.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих пределы, равен такой же сумме пределов слагаемых.

Теорема 3. Предел произведения конечного числа функций, имеющих пределы, равен произведению пределов сомножителей.

Теорема 4. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_1$ предел, отличный от нуля, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена в окрестности той же точки.

Теорема 5. Предел частного двух функций, имеющих пределы, равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля.

Теорема 6. Если $\alpha(x)$ есть функция бесконечно малая в окрестности точки $x = x_1$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ бесконечно большая в окрестности той же точки .

Замечательные пределы

Теорема 7. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен единице, т.е.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел.

Теорема 8. Предел последовательности $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \; e = 2{,}71828\ldots$$

Теорема 9. Предел функции $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

при $x \to \pm\infty$ равен числу e.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \\ &\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e. \end{aligned}\right\} \text{– второй замечательный предел.}$$

§2. Непрерывность

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Определение 2. Функция непрерывна на интервале (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Использование непрерывности для вычисления пределов

Теорема 1. Всякая элементарная функция непрерывна на том множестве, на котором она определена.

Теорема 2. Сумма, произведение и частное (при условии, что знаменатель отличен от нуля) непрерывных функций есть функция непрерывная.

Теорема 3. Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция, тогда $\lim\limits_{x \to x_1} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_1} x)$.

Последнее равенство означает, что непрерывная в точке $x = x_1$ функция допускает переход к пределу под знаком функции в окрестности рассматриваемой точки.

Правило 1. Чтобы найти предел в точке $x = x_1$ функции, непрерывной в этой точке, надо в функцию, стоящую под знаком предела, вместо аргумента x подставить его предельное значение x_1.

Сформулированное правило вместе с основными теоремами дает возможность вычислять пределы непрерывных функций.

Пример 1. Найти предел функции $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt{6+x}-1}{x-2}\right)^x$ в точке $x = 3$.

Решение. Так как данная функция непрерывна в точке $x = 3$, то, используя теоремы о правилах предельного перехода и свойство непрерывности, получим:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\sqrt{6+x}-1}{x-2}\right)^x = \left(\frac{\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{6+x}-1}{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}\right)^{\lim\limits_{x\to 3} x} =$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to3}(6+x)}-\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}x-\lim\limits_{x\to3}2}\right)^{\lim\limits_{x\to3}x}=\left(\frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to3}6+\lim\limits_{x\to3}x}-\lim\limits_{x\to3}1}{\lim\limits_{x\to3}x-\lim\limits_{x\to3}2}\right)^{\lim\limits_{x\to3}x}=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{6+3}-1}{3-2}\right)^3=\left(\frac{2}{1}\right)^3=8.$$

Столь подробная запись в практическом вычислении пределов не применяется, но мысленно каждый раз эти этапы необходимо пройти, потому что существо вопроса остается именно таким.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$; $k\in\mathbf{R}$, $k\neq0$.

Решение. Сделаем замену переменного $\frac{x}{k}=y$; если $x\to\pm\infty$, то $y\to\pm\infty$,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right)^k.$$

Выражение, стоящее под последним знаком предела, можно рассматривать как функцию u^k, где $u=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y$. Если $y\to\pm\infty$, то $u\to e$. Но функция u^k непрерывна в точке $u_0=e$. Следовательно, $\lim\limits_{u\to e}u^k=e^k$. Поэтому

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{y\to 0}(1+ky)^{\frac{1}{y}} = e^k$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{8x}$.

Из примера 2 следует

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}\right)^{8} = e^{-\frac{1}{2}\cdot 8} = e^{-4}$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+6x)^{\frac{5}{x}}$.

Из примера 2 следует

$$\lim_{x\to 0}((1+6x)^{\frac{1}{x}})^{5} = e^{6\cdot 5} = e^{30}$$

Из теоремы 6 о связи бесконечно малой и бесконечно большой следуют два правила для практического нахождения пределов.

Правило 2. Если при отыскании предела дроби предел знаменателя равен нулю, а предел числителя отличен от нуля, то предел такой функции равен +∞ или –∞.

Пример 5. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x+1}{x-5} = \infty$.

Правило 3. Если при отыскании предела дроби предел знаменателя равен ∞, а предел числителя равен конечному числу, то предел дроби равен 0.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{4}{\operatorname{tg} x} = 0$.

§3. Раскрытие неопределенностей

Как показывают решения задач, приведенных в §2 этой же главы, в простейших случаях нахождение предела функции сводится к подстановке в аналитическое выражение, задающее эту функцию, предельного значения аргумента. Часто подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 0^0;\ \infty^0;\ 1^\infty.$$

Нахождение предела функции в этих случаях называется раскрытием неопределенности. Для раскрытия неопределенности приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

В последующих задачах показывается, какими приемами обычно пользуются при таких преобразованиях.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x}$.

Решение: Прежде всего отметим, что при $x_1 = 2$ функция разрывна и непосредственная подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенному выражению вида $\dfrac{0}{0}$. Следовательно, прежде чем перейти к пределу, необходимо данное выражение преобразовать.

Разложив на множители числитель и знаменатель, вспомним, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
тогда $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)\cdot(x - 3)$ и $x^2 - 2x = x\cdot(x - 2)$, получим:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x}=-\frac{1}{2}.$$

Заметим, что аргумент x только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним. Таким образом, разность $x - 2$, т.е. множитель, на который мы сокращаем, отличен от нуля при $x \to 2$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{x}$.

Решение: Подстановка $x = 0$ приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$. Домножим на сопряженное к $1-\sqrt{1+x}$ числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1+x})(1+\sqrt{1+x})}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(\sqrt{1+x})^2}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{x\cdot(1+\sqrt{1+x})}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$.

Решение: Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$, для ее раскрытия домножим на сопряженные к числителю и знаменателю:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})(3+\sqrt{2x+1})}{(3-\sqrt{2x+1})(3+\sqrt{2x+1})(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{[2^2-(\sqrt{x})^2](3+\sqrt{2x+1})}{[3^2-(\sqrt{2x+1})^2](2+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{(9-2x-1)(2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})}{2(4-x)(2+\sqrt{x})}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

Правило 1. Если неопределенность вида $\frac{0}{0}$ образована рациональными или иррациональными функциями, нужно преобразовать подпредельную функцию таким образом, чтобы выделить в числителе и знаменателе множитель, предел которого равен нулю, и, сократив на него дробь, найти предел частного.

Правило 2. Для нахождения предела частного от деления двух рациональных или иррациональных функций при $x\to\infty$ нужно раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, для чего числитель и знаменатель подпредельной дроби необходимо разделить на высшую степень аргумента знаменателя и находить далее предел частного.

Результаты возможны следующие:

1) искомый предел равен отношению коэффициентов при старших степенях аргумента числителя и знаменателя, если эти степени одинаковы;

2) предел равен бесконечности, если степень аргумента числителя выше степени аргумента знаменателя;

3) предел равен нулю, если степень аргумента числителя ниже степени аргумента знаменателя.

Пример 4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-3x+2}{3x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(6-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\frac{7}{x^2}\right)}=\frac{6}{3}=2\text{, т.к.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=0.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^3+1}}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}}{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x\left(4+\frac{1}{x^3}\right)}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)}=\infty$$

.

Пример 6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt[4]{x^6+2x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}}{x\cdot\sqrt[4]{x^2\left(1+\frac{2}{x^5}\right)}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

В этом примере неопределенность вида ∞ – ∞. Этот случай нахождения предела нужно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Домножим на сопряженное числитель и знаменатель, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{(x+\sqrt{x^2+5x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+5x)}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=-\frac{5}{2}=-2,5.$$

Неопределенность 1^{∞}.

Мы уже рассматривали несколько примеров на второй замечательный предел

$$\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e \text{ и } \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e.$$

Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-1}$ (неопределенность 1^{∞}).

Решение. Преобразуем выражение в скобках, выделив единицу $\frac{4x-3}{4x+1}=\frac{4x+1-1-3}{4x+1}=\left(1+\frac{-4}{4x+1}\right)$, понимаем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{4x+1}\right)=0$, т.е. $\frac{-4}{4x+1}=\frac{1}{y}$, тогда $\frac{4x+1}{-4}=y$. Получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{4x+1}\right)^{\frac{4x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4}{4x+1}\cdot(2x-1)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(2x-1)}{4x+1}}=e^{-2}.$$

§4. Эквивалентные бесконечно малые функции (б.м.ф.). Применение б.м.ф. к вычислению пределов

Среди различных бесконечно малых в приложениях математики важную роль играют те из них, предел отношения которых равен 1.

Определение. Две бесконечно малые функции в окрестности точки $x = x_1$ α и β называются **эквивалентными** (равносильными), если предел их отношения в этой точке равен единице, т.е.

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Эквивалентность обозначается символом ~, т.е. пишут $\beta \sim \alpha$.

В окрестности точки $x = 0$

$\sin x \sim \mathrm{tg}\, x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg}\, x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \sim x$.

Теорема 1. Предел отношения двух бесконечно малых функций в точке $x = x_1$ равен пределу отношения им эквивалентных бесконечно малых функций в той же точке .

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

При $x \to 0$ $\sin x \sim x$, $\sin 2x \sim 2x$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{3x + x^2}{2x - x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x(3 + x)}{x(2 - x^2)} = 1{,}5$$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2 - 4}$ (неопределенность $\dfrac{0}{0}$).

Так как при $x \to 2$, $x - 2 \to 0$ и $\sin(x - 2) \sim x - 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-2)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$).

При $x \to 0$ $\operatorname{arctg}2x \sim 2x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 2x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$).

Так как $1 - \cos4x = 2\cdot\sin^2 2x$ (из формулы $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$), при $x \to 0$ $\sin2x \sim 2x$, $\operatorname{tg}3x \sim 3x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x\cdot \operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(2x)^2}{x\cdot 3x}=\frac{8}{3}.$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$).

Так как при $x \to \frac{1}{2}$ $1 - 2x \to 0$,

$\arcsin(1 - 2x) \sim 1 - 2x$,

получим $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(1-2x)}{(2x-1)(2x+1)}=-\frac{1}{2}.$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-12x)}{e^{-6x}-1}$ (неопределенность $\frac{0}{0}$).

Так как при $x \to 0$ $\ln(1-12x) \sim -12x$, $e^{-6x}-1 \sim (-6x)$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-12x)}{e^{-6x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-12x}{-6x}=2.$$

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

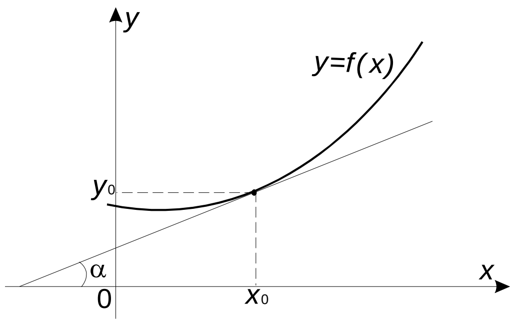
§1. Производная и дифференциал

Определение 1. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Обозначается $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Геометрический смысл производной



Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла, который образует касательная, проведенная к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 с положительным направлением оси Ox.

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции. Функция называется дифференцируемой в некоторой точке, если она имеет в этой точке производную, и дифференцируемой на некотором множестве, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Теорема 1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Основные правила дифференцирования

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, дифференцируемые в некоторой точке x_0, C – постоянная величина, тогда:

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$;

3) $(C)' = 0$;

4) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;

5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$.

Производная сложной функции

Теорема 2. Пусть y – сложная функция x, т.е. $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, или $y = f[\varphi(x)]$.

Если $\varphi(x)$ и $f(u)$ – дифференцируемые функции своих аргументов соответственно в точках x и $u = \varphi(x)$, то сложная функция также дифференцируема в точке x и ее производная находится по формуле

$$y'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x), \text{ или}$$

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'.$$

Таблица производных

1) $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

10) $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11) $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12) $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

13) $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Замечание. Если $u = x$, то $u' = x' = 1$.

Примеры.

Найти производные от функций:

1. $y = 6\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x^2} + 6x - x^2 + 4$.

Преобразуем функцию, введя дробные и отрицательные показатели: $y = 6 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{1-\frac{2}{3}} - 4 \cdot x^{-2} + 6x - x^2 + 4$.

Вычислим y', используя правила 1, 2, 3 и формулу 1)

$$y' = 6 \cdot (x^{\frac{1}{2}})' + (x^{\frac{1}{3}})' - 4 \cdot (x^{-2})' + 6(x)' - (x^2)' + (4)' =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 4 \cdot (-2x^{-2-1}) + 6 - 2 \cdot x^{2-1} =$$

$$=3x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+8x^{-3}+6-2x=\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}+\frac{8}{x^3}-2x+6.$$

2. $y=\dfrac{4\sqrt{x}-1}{\operatorname{tg}x}$.

Применим правило 5 и формулы 1) и 8):

$$y'=\frac{(4\sqrt{x}-1)'\cdot\operatorname{tg}x-(\operatorname{tg}x)'\cdot(4\sqrt{x}-1)}{\operatorname{tg}^2x}=$$

$$=\frac{4\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos^2x}\cdot(4\sqrt{x}-1)}{\operatorname{tg}^2x}=\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{4\sqrt{x}-1}{\cos^2x}}{\operatorname{tg}^2x}=$$

$$=\frac{(2\sin x\cdot\cos x-4+\sqrt{x})\cos^2x}{\sqrt{x}\cdot\cos^2x\cdot\sin^2x}=\frac{\sin 2x+\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}\cdot\sin^2x}.$$

3. $y=3^x\cdot(\log_3x-x)$.

Применим правило 4 и формулы 2) и 4):

$$y'=(3^x)'\cdot(\log_3x-x)-3^x\cdot(\log_3x-x)'=$$

$$=3^x\cdot\ln 3(\log_3x-3)-3^x\cdot\left(\frac{1}{x\ln 3}-1\right)=$$

$$=\frac{3^x\cdot(x\ln^2 3\cdot\log_3x-3\cdot x\ln^2 3-1+x\ln 3)}{x\ln 3}.$$

4. $y=2x\cdot\sqrt{x}+\ln\sin x+4^{3x}$.

Используем правила 1 и 2, применим теорему о производной сложной функции и по таблице производных имеем:

$$y'=2(x^{\frac{3}{2}})'+(\ln\sin x)'+(4^{3x})'=2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'+$$

$$+4^{3x}\cdot\ln 4\cdot(3x)'=3\sqrt{x}+\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x+4^{3x}\cdot\ln 4\cdot 3=$$

$$=3\sqrt{x}+\operatorname{ctg}x+3\ln 4\cdot 4^{3x}.$$

5. $y=7^{\operatorname{arcctg}x-\sqrt{x}}$.

Воспользуемся формулой 2):

$$y'=7^{\operatorname{arcctg}x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot(\operatorname{arcctg}x-\sqrt{x})'=7^{\operatorname{arcctg}x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\times$$

$$\times\left(\frac{-1}{1+x^2}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)=-7^{\operatorname{arcctg}x-\sqrt{x}}\cdot\ln 7\cdot\frac{2\sqrt{x}+1+x^2}{2(1+x^2)\sqrt{x}}.$$

6. $y=\sqrt{\sin^2 4x-x^2}$.

$$y'=((\sin^2 4x-x^2)^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}(\sin^2 4x-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\sin^2 4x-x^2)'=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}\cdot(2\sin 4x\cdot(\sin 4x)'-2x)=$$

$$=\frac{2\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot 4-2x}{2\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}=\frac{4\sin 8x-2x}{2\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}=\frac{2\sin 8x-x}{\sqrt{\sin^2 4x-x^2}}.$$

7. $y=x^{2x}$.

Чтобы найти производную от показательно-степенной функции, необходимо ее предварительно прологарифмировать, например, по основанию e.

$\ln y=\ln x^{2x}$, т.к. $\ln x^n=n\ln x$, получим $\ln y=2x\cdot\ln x$.

Теперь берем производную от обеих частей. Слева производную сложной функции, справа производную произведения.

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\cdot(x'\cdot\ln x + x\cdot(\ln x)') \Rightarrow$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = 2\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) \Rightarrow y' = 2y(\ln x+1),$$

так как $y = x^{2x}$, $y' = 2x^{2x}\cdot(\ln x + 1)$.

8. $y = 3^{xy} + x^2$.

Дифференцируем обе части равенства, учитывая, что y есть функция от x:

$$y' = 3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(x\cdot y)' + 2x \Rightarrow \quad y' = 3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(x'\cdot y + x\cdot y') + 2x \Rightarrow$$

$$y' = 3^{xy}\cdot\ln 3\cdot(y + x\cdot y') + 2x \Rightarrow$$

$$y' = 3^{xy}\cdot\ln 3\cdot y + x\cdot y'\cdot 3^{xy}\cdot\ln 3 + 2x \Rightarrow$$

$$y'\cdot(1 - x\cdot 3^{xy}\cdot\ln 3) = 3^{xy}\cdot\ln 3\cdot y + 2x \Rightarrow$$

$$y' = \frac{3^{xy}\cdot\ln 3\cdot y + 2x}{1 - x\cdot 3^{xy}\cdot\ln 3}.$$

Определение 2. Дифференциал функции равен ее производной, умноженной на дифференциал независимой переменной.

$$dy = y'\cdot dx,$$

дифференциал независимой переменной равен ее приращению

$$dx = \Delta x.$$

При достаточно малых значениях $|\Delta x|$

$$\Delta y \approx dy.$$

Из этого следует формула приближенного вычисления

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Примеры.

9. Найти дифференциал от функции $y = e^{-x}(x^2 - 1)$.

Сначала найдем y'.

$$y' = (e^{-x})'\cdot(x^2 - 1) + (e^{-x})\cdot(x^2 - 1)' =$$

$$= (e^{-x})\cdot(-x)'\cdot(x^2 - 1) + e^{-x}\cdot 2x = e^{-x}\cdot(-x^2 + 1 + 2x).$$

$$dy = y'\cdot dx.$$

$$dy = e^{-x}\cdot(2x + 1 - x^2)dx.$$

10. Вычислить приближенное значение функции $y = x^7 - 3x^4 + 4x^3 - 2$ при $x = 1{,}002$.

Пусть $x_0 = 1$, тогда $\Delta x = 0{,}002$. Найдем y'.

$$y' = 7x^6 - 12x^3 + 12x^2.$$

Найдем значение функции и ее производной в точке $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1 - 3\cdot 1 + 4\cdot 1 - 2 = 0,$$

$$f'(1) = 7\cdot 1 - 12\cdot 1 + 12\cdot 1 = 7,$$

$$f(1{,}002) \approx f(1) + f'(1)\cdot\Delta x \Rightarrow$$

$$\mathrm{f}(1{,}002) \approx 0 + 7\cdot 0{,}002 = 0{,}014.$$

Определение 3. Производной n-го порядка называется первая производная от производной (n-1)-го порядка.

Обозначается $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$.

Пример 11. Найти производную третьего порядка от функции $y = x^2\cdot e^x$.

Найдем y':

$$y' = (x^2)'\cdot e^x + x^2\cdot(e^x)' = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x = e^x\cdot(x^2 + 2x).$$

Найдем y''.

$$y'' = (y')' = (e^x)'\cdot(x^2 + 2x) + e^x\cdot(x^2 + 2x)' =$$

$$= e^x\cdot(x^2 + 2x + 2x + 2) = e^x\cdot(x^2 + 4x + 2).$$

Затем найдем y'''.

$$y''' = (y'')' = e^x\cdot(x^2 + 4x + 2) + e^x\cdot(2x + 4) =$$
$$= e^x\cdot(x^2 + 6x + 6).$$

§2. Приложение производной к вычислению пределов и исследованию функций

Правило Лопиталя. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $\varphi'(x)\neq 0$, и если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Таким образом, для неопределенностей $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ предел отношения двух функций равен пределу отношения их производных, если последний существует (конечный или бесконечный).

Замечание. Символ x_0 может быть как конечным числом, так и бесконечностью.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16}$.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 5x^2 - 6x - 16} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(x^4 - 16)'}{(x^3 + 5x^2 - 6x - 16)'} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{4x^3}{3x^2 + 10x - 6} = \frac{32}{26} = \frac{16}{13}.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln(1+x)}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(\ln(1+x))'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{1+x}}=\lim_{x\to\infty}(1+x)=\infty.$$

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале (a, b), принадлежащем области определения функции, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Определение 2. Функция $y = f(x)$ называется убывающей на интервале (a, b), если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции,
т.е. если $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Функции убывающие или возрастающие на некотором интервале называются монотонными.

Теорема 1 (достаточный признак возрастания функции).

Если во всех точках интервала $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Теорема 2 (достаточный признак убывания функции).

Если во всех точках интервала $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на этом интервале.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$, $(\Delta x \neq 0)$.

Определение 4. Функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$, $(\Delta x \neq 0)$.

Точки минимума и максимума функции называются точками экстремума.

Теорема 3 (необходимый признак экстремума).

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и имеет в этой точке экстремум, то ее производная при $x = x_0$ обращается в нуль: $f'(x_0) = 0$.

Следствие. Функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная равна нулю, либо в тех точках области определения, где производная не существует.

Такие точки называются критическими точками I-го рода.

Теорема 4 (первый достаточный признак экстремума).

Если при переходе через критическую точку I-го рода первая производная меняет знак с "+" на "–", то в этой точке максимум, если она меняет знак с "–" на "+", то минимум.

Теорема 5 (второй достаточный признак экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_0 и пусть выполняются условия $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, тогда $f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если $f''(x_0) > 0$, и максимум, если $f''(x_0) < 0$.

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) найти критические точки внутри $[a, b]$;

2) вычислить значение функции в этих точках и на границе области $f(a)$ и $f(b)$;

3) выбрать среди этих значений наибольшее и наименьшее.

Определение 5. График функции называется выпуклым в интервале (a,b), если в этом интервале он расположен ниже любой своей касательной, и вогнутым, если в этом интервале он расположен выше любой своей касательной.

Теорема 6 (достаточный признак вогнутости-выпуклости графика). Если для функции $y = f(x)$ во всех точках интервала (a, b) $f''(x) > 0$, то кривая вогнута на этом интервале, и если $f''(x) < 0$, то выпукла.

Определение 6. Точки графика непрерывной функции, в которых изменяется выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Теорема 7 (достаточный признак существования точки перегиба). Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет первую производную $f'(x_0)$, а $f''(x_0) = 0$ или не существует и $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Определение 7. Прямая называется асимптотой кривой, если расстояние от переменной точки M кривой до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M от начала координат по какой-либо ветви кривой.

Вертикальные асимптоты: прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой $\Leftrightarrow$ когда выполняется одно из условий: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$.

Горизонтальные асимптоты: прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой $\Leftrightarrow$ когда $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

Наклонные асимптоты: для того, чтобы кривая $y = f(x)$ имела асимптоту $y = kx + b \Leftrightarrow$ чтобы существовали конечные пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] \text{ или}$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x};\ b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx].$$

Замечание. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной.

В примерах 3 и 4 исследовать данные функции и построить их графики.

Исследование будем проводить по следующей схеме: 1) найти область определения функции и исследовать ее поведение на границах области; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума; 5) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и точки перегиба; 6) найти асимптоты графика функции.

Пример 3. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

1. Областью определения функции D является вся числовая прямая, за исключением точки с абсциссой $x = 1$, в которой знаменатель функции обращается в нуль, т.е.
D: $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ \infty)$.

а) $x \to -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$;

б) $x \to 1-0$; $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1-0} y = -\infty$;

в) $x \to 1+0$; $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$; $\lim\limits_{x \to 1+0} y = \infty$;

г) $x \to \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty$; $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$.

2. Функция непрерывна во всей области определения, как частное двух непрерывных функций.

3. Если функция четная, то выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, если нечетная, то выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, если ни одно из этих равенств не выполняется, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Найдем $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 2}{-x - 1} = \frac{x^2 + 2x + 2}{-x - 1}.$$

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, значит, функция ни четная, ни нечетная.

4. Для нахождения точек экстремума найдем критические точки функции, т.е. те точки, в которых первая производная обращается в нуль или не существует.

$$y' = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2};\ y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Производная не существует только при $x = 1$, где функция не определена, найдем значения x, при которых она обращается в нуль.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0 \text{ или} \\ x - 2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 0, \\ x = 2. \end{matrix}$$

Вычислим значение функции при $x = 0$ и $x = 2$:

$$y = \left.\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}\right|_{x=0} = -2;$$

$$y = \left.\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}\right|_{x=2} = 2.$$

Получили две критические точки $A_1(0; -2)$ и $A_2(2; 2)$, которые проверим на экстремум с помощью первого достаточного признака. Для этого исследуем, как ведет себя первая производная этой функции при переходе через критические точки.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; \infty)$
y'	+	0	–	не сущ.	–	0	+
y	$\nearrow$	макс.	$\searrow$	не сущ.	$\searrow$	мин.	$\nearrow$

При переходе через точку A_1 производная меняет знак с "+" на "–", значит, в этой точке максимум функции, а при переходе через точку A_2 – с "–" на "+", значит, в этой точке функция достигает своего минимума. Там, где производная положительна, функция возрастает, где отрицательна – убывает.

5. Для определения точек перегиба и направления вогнутости функции найдем вторую производную.

$$y'' = \left[\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}\right]'; \quad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная нигде не обращается в нуль, поэтому точек перегиба у функции нет. Знак второй производной зависит от знака ее знаменателя:

$y'' > 0$, если $(x-1)^3 > 0$, т.е. $x > 1$;

$y'' < 0$, если $(x-1)^3 < 0$, т.е. $x < 1$.

Таким образом, функция вогнута на интервале $(1; \infty)$ и выпукла на интервале $(-\infty; 1)$.

6. Определим, имеет ли функция асимптоты. Вернемся к исследованиям в пункте 1: из 1а, 1г по определению следует, что горизонтальных асимптот у функции нет; из 1б, 1в также по определению следует, что $x = 1$ является вертикальной асимптотой функции.

Для того, чтобы существовала наклонная асимптота $y = ax + b$, необходимо существование конечного отличного от нуля предела $a = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x}$.

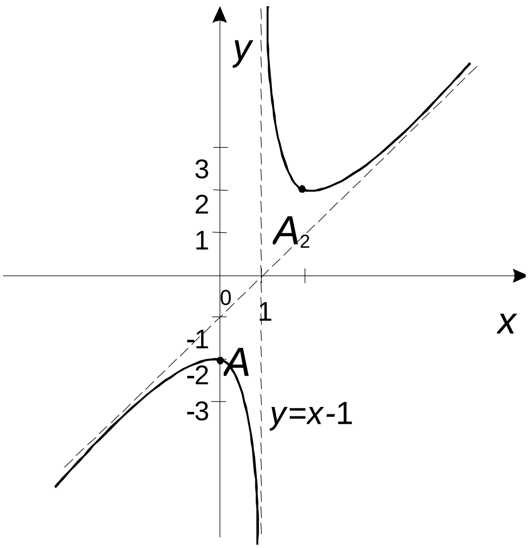
$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x} = 1.$$

b определяется по формуле $b = \lim\limits_{x\to\infty}(y - ax)$.

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+2}{x-1}=-1.$$

Таким образом, наклонная асимптота существует и имеет вид $y = x - 1$.

По полученным исследованиям строим график функции $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.



Пример 4. $y=e^{8x-x^2-14}$.

1. Областью определения данной функции является вся числовая ось, D: $(-\infty;\ \infty)$. Исследуем поведение функции на концах области:

$$\lim_{x\to-\infty}e^{8x-x^2-14}=\lim_{x\to-\infty}e^{-(x-4)^2+2}=0;\ \lim_{x\to\infty}e^{8x-x^2-14}=0.$$

Таким образом, на концах области функция стремится к нулю.

2. Функция непрерывна на всей числовой оси.

3. Исследуем на четность, нечетность.

Найдем $f(-x)$: $f(-x) = e^{-8x-x^2-14}$.

$f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$ $\Rightarrow$ функция не является ни четной, ни нечетной.

4. Для отыскания экстремума найдем первую производную функции $y' = (8-2x)\cdot e^{-x^2+8x-14}$.

Производная определена на всей числовой оси и обращается в нуль при x = 4. Вычислим значение функции при x = 4.

$$y = e^{8x-x^2-14}\Big|_{x=4} = e^2.$$

Получили критическую точку $A_2(4;\ e^2)$. Исследуем ее с помощью первого достаточного признака на экстремум.

x	$(-\infty;\ 4)$	4	$(4;\ \infty)$
y'	+	0	–
y	$\nearrow$	макс.	$\searrow$

Итак, функция возрастает на интервале $(-\infty;\ 4)$, убывает на интервале $(4;\ \infty)$ и имеет максимум в точке A_2.

5. Найдем вторую производную для определения точек перегиба и промежутков вогнутости и выпуклости.

$y'' = (8-2x)^2 \cdot e^{-x^2+8x-14} - 2\cdot e^{-x^2+8x-14}$, или

$y'' = 2\cdot e^{-x^2+8x-14}(2x^2 - 16x + 31)$.

Значение второй производной равно нулю, если

$$2x^2 - 16x + 31 = 0.$$

Решаем это квадратное уравнение:

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256-248}}{4}, \text{ или } x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{2}}{2},$$

или $x_{1,2} = 4 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Вычислим значение функции при $x = 4 \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$y = e^{8x-x^2-14}\Big|_{x=4\pm\frac{\sqrt{2}}{2}} = e^{3/2}.$$

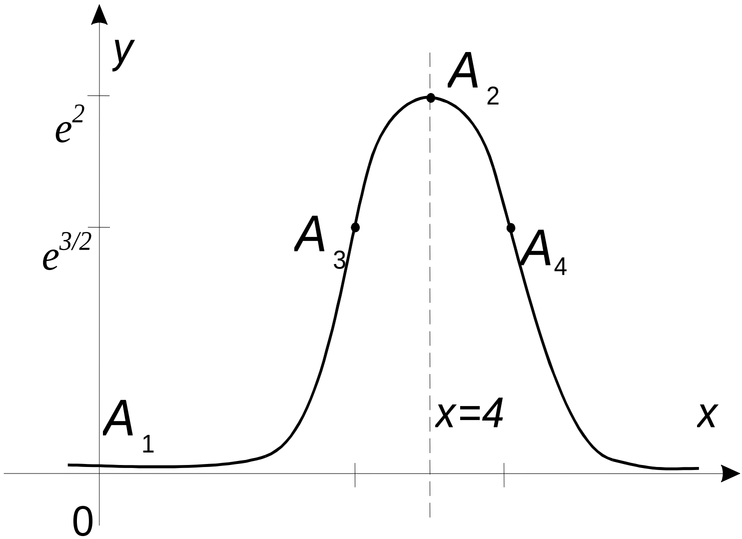
Получили точки $A_3(4-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ e^{3/2})$ и $A_4(4+\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ e^{3/2})$, с помощью достаточного признака проверим, являются ли они точками перегиба. Для этого проверим, как ведет себя вторая производная при переходе через эти точки.

x	$(-\infty;\ 4-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$4-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(4-\frac{\sqrt{2}}{2};4+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$4+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(4+\frac{\sqrt{2}}{2};\ \infty)$
y''	+	0	–	0	+
y	$\cup$	перегиб	$\cap$	перегиб	$\cup$

Итак, на интервалах $(-\infty;\ 4-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $(4+\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \infty)$ функция вогнута, на интервале $(4-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 4+\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ выпукла, а точки A_3 и A_4 являются точками перегиба.

6. Определим наличие асимптот. Из исследований пункта 1 следует, что вертикальных асимптот функция не имеет, но имеет горизонтальную асимптоту $x = 0$. Наклон-

ных асимптот также нет, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{8x-x^2-14}}{x}=0$. Построим график функции $y=e^{8x-x^2-14}$ по характерным точкам.



Глава 5. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§1. Частные производные, дифференциал

Определение 1. Если каждой паре (x,y) значений двух независимых переменных величин x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины z, то говорят, что z есть функция двух переменных x и y, и обозначают $z = f(x, y)$.

Определение 2. Совокупность пар (x, y) значений x и y, при которых функция $z = f(x, y)$ принимает определенное действительное значение, называется областью существования этой функции.

Определение 3. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называется предел отношения частного приращения Δz по x, $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ к приращению Δx при условии, что Δx стремится к нулю, т.е.

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Другие обозначения z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по y:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Наряду с определением 3 имеет место другое определение частных производных.

Определение 4. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по x называется производная от z, взятая в предположении, что y – постоянная величина, аналогично, z'_y – это производная, посчитанная в предположении, что x – постоянна.

Пример 1. Найти частные производные от функции $z = x^2 y + e^{xy} + \sqrt{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot (x^2)' + e^{xy} \cdot (xy)'_x + 0 = 2xy + e^{xy} \cdot y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot (y)' + e^{xy} \cdot (xy)'_y + (y^{\frac{1}{2}})' = x^2 + xe^{xy} + \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Определение 5. Дифференциал первого порядка функции двух переменных находим по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Пример 2. Найти dz для функции $z = \dfrac{x}{y}$.

Найдем частные производные:

$z'_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y} \cdot (x)' = \dfrac{1}{y}$, $z'_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} = x \cdot (y^{-1})' = -\dfrac{x}{y^2}$, тогда $dz = \dfrac{1}{y} dx - \dfrac{x}{y^2} dy$, или $dz = \dfrac{ydx - xdy}{y^2}$.

Приближенное вычисление с помощью дифференциала

Известно, что при малых приращениях аргументов x и y функция $z = f(x,y)$ получает полное приращение Δz, приближенно равное dz, т.е. $\Delta z \cong dz$.

Так как $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$,

$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$ и $dx = \Delta x$; $dy = \Delta y$, получим

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \cong f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$ или

$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \cong f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$.

Введем обозначения $x_1 + \Delta x = x_2$, $y_1 + \Delta y = y_2$, получаем $f(x_2, y_2) \cong f(x_1, y_1) + f'_x(x_1, y_1)\Delta x + f'_y(x_1, y_1)\Delta y$,

где $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$.

Эта формула позволяет находить приближенное значение функции $z = f(x, y)$ в точке (x_2, y_2), если известно ее точное значение в точке (x_1, y_1).

Пример 3. Дана функция $z = \ln(\sqrt{x} + y)$ и точки $P_1(1;\ 0)$; $P_2(0{,}96;\ 0{,}05)$. Найти приближенное значение функции в точке P_2, исходя из ее точного значения в точке P_1.

1. Для отыскания приближенного значения функции $z = \ln(\sqrt{x} + y)$ в точке $P_2(0{,}96;\ 0{,}05)$ воспользуемся формулой

$$f(x_2, y_2) \cong f(x_1, y_1) + f'_x(x_1, y_1)\Delta x + f'_y(x_1, y_1)\Delta y,$$

где $\Delta x = 0{,}96 - 1 = -0{,}04$; $\Delta y = 0{,}05 - 0{,}00 = 0{,}05$;

$f(x_1, y_1) = \ln(\sqrt{1} + 0) = \ln 1 = 0$; $f(x_2, y_2) = \ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05)$.

2. Находим частные производные f'_x и f'_y в точке $P_1(1;\ 0)$.

$$f'_x = [\ln(\sqrt{x} + y)]'_x = \frac{1}{\sqrt{x} + y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad f'_x(1, 0) = \frac{1}{2};$$

$$f'_y = [\ln(\sqrt{x} + y)]'_y = \frac{1}{\sqrt{x} + y} \cdot 1; \ f'_y(1, 0) = 1.$$

3. Найденные значения $f'_x(1,0)$, $f'_y(1, 0)$, $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = 0{,}05$ подставим в формулу
$f(0{,}96;\ 0{,}05) = \ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05) \cong 0{,}5\cdot(-0{,}04) + 1\cdot 0{,}05 = 0{,}03$, так как $f(1;\ 0) = 0$.

Ответ: $\ln(\sqrt{0{,}96} + 0{,}05) \cong 0{,}03$.

Определение 6. Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка для функции $z = f(x,y)$ и обозначаются

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}.$$

Доказано, что $z''_{xy} = z''_{yx}$; z''_{xy} и z''_{yx} называются смешанными частными производными второго порядка для функции
$z = f(x, y)$.

Пример 4. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$, если

$z = \ln(y - x) - \ln x - \ln y$.

Найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y-x}(y-x)'_x - \frac{1}{x} - 0 = -\frac{1}{y-x} - \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_x = \frac{1}{(y-x)^2}(y-x)'_x + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = \frac{1}{(y-x)^2}(y-x)'_y + 0 = \frac{1}{(y-x)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{(y-x)^2} + \left(-\frac{1}{(y-x)^2} + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$, что и требовалось доказать.

§2. Экстремумы функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значение функции z = *f*(*x*,*y*) в замкнутой области

Определение 1. Функция $z = f(x, y)$ имеет максимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$ имеет минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, если $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ для всех точек (x, y), достаточно близких к точке (x_0, y_0) и отличных от нее.

Максимум и минимум функции называются экстремумами функции $z = f(x, y)$.

Теорема 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то частные производные от функции $z = f(x, y)$, z'_x и z'_y обращаются в нуль или не существуют в точке M_0.

Точки, в которых частные производные обращаются в нуль или не существуют, называются критическими.

Теорема 2 (достаточный признак экстремума).

Пусть в некоторой области, содержащей критическую точку $M_0(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно, и пусть $A = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ и $C = \dfrac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$.

Тогда:

1) $f(x, y)$ имеет максимум в точке M_0, если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A < 0$;

2) $f(x, y)$ имеет минимум в точке M_0, если $A \cdot C - B^2 > 0$ и $A > 0$;

3) $f(x, y)$ не имеет экстремума, если $A \cdot C - B^2 < 0$;

4) если $A \cdot C - B^2 = 0$, то экстремум может быть, может не быть.

Пример 1. Найти экстремумы функции

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$$

1. Находим z'_x, z'_y и критические точки, т.е. такие точки, в которых z'_x и z'_y равны нулю.

$z'_x = 3x^2 - 6y$, $z'_y = 24y^2 - 6x$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 24y^2 - 6x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = 0, \\ x_2 = 1, y_2 = 0{,}5. \end{cases}$$

$M_1(0, 0)$ и $M_2(1; 0{,}5)$ – критические точки.

2. Находим частные производные z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy} и их значения в критических точках:

$$z''_{xx} = 6x;\ z''_{xy} = -6;\ z''_{yy} = 48y;$$

$$A_1 = z''_{xx}(0,0) = 0;\ B_1 = z''_{xy}(0,0) = -6;$$

$$C_1 = z''_{yy}(0,0) = 0.$$

В точке $M_1(0,0)$: $A_1 \cdot C_1 - B_1^2 = 0 - 36 = -36 < 0$; значит, в точке M_1 экстремума нет.

$$A_2 = z''_{xx}(1;\ 0,5) = 6;\ B_2 = z''_{xy}(1;\ 0,5) = -6;$$

$$C_2 = z''_{yy}(1;\ 0,5) = 24.$$

В точке $M_2(1;\ 0,5)$ $A_2 \cdot C_2 - B_2^2 = 6 \cdot 24 - 36 = 108 > 0$ и $A_2 > 0$, значит, точка M_2 – точка минимума.

$z_{\min}(1;\ 0,5) = 1^3 + 8 \cdot (0,5)^3 - 6 \cdot 1 \cdot 0,5 + 1 = 0.$

Ответ: $z_{\min}(1;\ 0,5) = 0.$

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области, нужно:

а) найти критические точки, лежащие внутри области, вычислить значение функции в этих точках;

б) исследовать функцию на границе области; если граница состоит из нескольких различных линий, то исследование проводится для каждого участка в отдельности;

в) сравнить полученные значения функции и установить наибольшее и наименьшее значение функции.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 + y^2 - 2x - y$ в прямоугольнике
$0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.$

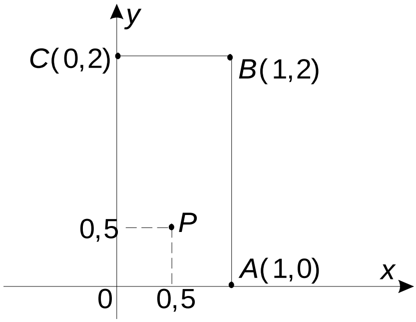
Решение: 1. Находим $z'_x = 4x - 2$, $z'_y = 2y - 1$, для отыскания критических точек составим систему

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$$ отсюда $x = 0,5$; $y = 0,5$.

$P(0{,}5;\ 0{,}5)$ – критическая точка и принадлежит заданной области.

Находим значение в точке P:

$$z(0{,}5;0{,}5)=2\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}.$$



2. Граница области состоит из отрезков OA, AB, BC и CO. Определим наибольшее и наименьшее значение функции на каждом из этих участков. На отрезке OA: $y = 0$,
а $0 \le x \le 1$. Если $y = 0$, то функция z на этом отрезке имеет вид $z = 2x^2 - 2x$, и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения этой функции одного аргумента x на отрезке $[0; 1]$. $z'_x = 4x - 2$; $z'_x = 0$;
тогда $4x - 2 = 0$, отсюда $x = 0{,}5$. Находим значение z в точке $P_1(0{,}5; 0)$ и на концах отрезка, т.е. в точках $O(0, 0)$ и $A(1, 0)$.

$z_{\text{наим.}}(0{,}5;\ 0) = 2\cdot\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2} = -0{,}5$; $z(0;\ 0) = 0$; $z_{\text{наиб.}}(1;\ 0) = 0$.

Аналогично проводим решение на каждом из оставшихся участков. На отрезке AB: $x = 1$, тогда
$z = 2 + y^2 - 2 - y = y^2 - y$ функция аргумента y при $0 \le y \le 2$.
$z'_y = 2y - 1$; $z'_y = 0$ при $y = 0{,}5$. Находим значение z в точках

$P_2(1;\ 0{,}5)$, $B(1;\ 2)$; $z_{\text{наим.}}(1;\ 0{,}5) = -\dfrac{1}{4}$; $z_{\text{наиб.}}(1;\ 2) = 2$, а $z_A = 0$ уже известно. На отрезке BC: $y = 2$, тогда $z = 2x^2 - 2x + 2$ при $0 \le x \le 1$. $z'_x = 4x - 2$; $z'_x = 0$ при $x = 0{,}5$. Находим значения z в $P_3(0{,}5;\ 2)$ и $C(0;\ 2)$ и $z_B = 2$ – известно.

$z_{\text{наим.}}(0{,}5;\ 2) = \dfrac{3}{2}$; $z_{\text{наиб.}}(0;\ 2) = 2$.

На отрезке CO: $x = 0$, тогда $z = y^2 - y$ при $0 \le y \le 2$. $z'_y = 2y - 1$; $z'_y = 0$ при $y = 0{,}5$. Находим z в точках $P_4(0;\ 0{,}5)$ и $O(0;\ 0)$, в точке $C(0;\ 2)$ значение $z_{\text{наиб.}}(0;\ 2) = 2$ уже найдено.

$z_{\text{наим.}}(0;\ 0{,}5) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}$; $z(0;\ 0) = 0$.

Сравнивая полученные значения z в критической точке и наименьшие значения z на участках границы, заключаем, что $z_{\text{наим.}} = -\dfrac{3}{4}$ в точке $P(0{,}5;\ 0{,}5)$, а наибольшее значение $z_{\text{наиб.}} = 2$ в точках $B(1;\ 2)$ и $C(0;\ 2)$.

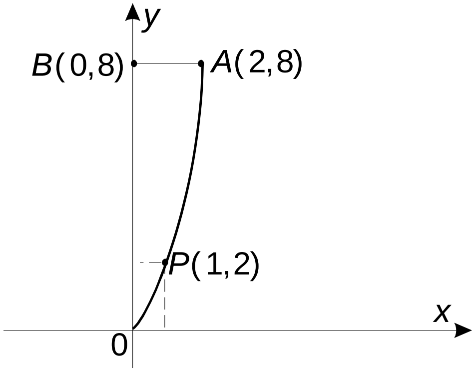
Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 3x^2 - 4xy + 4y + 2x + 6$ в области, ограниченной параболой $y = 2x^2$, прямой $y = 8$ и осью Oy $(x \ge 0)$.

Решение: 1. Находим критические точки

$$\begin{cases} z'_x = 6x - 4y + 2 = 0 \\ z'_y = -4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Получили критическую точку $P(1;\ 2)$, которая расположена на границе OA: $z(1;\ 2) = 3 - 8 + 8 + 2 + 6 = 11$.

2. Граница области состоит их трех участков: OA, AB, BO.



На участке OA: $y = 2x^2$, а $0 \le x \le 2$, функция имеет вид $z = 11x^2 - 8x^3 + 2x + 6$. Находим $z'_x = 22x - 24x^2 + 2$, $z'_x = 0$, при $x = 1$ и $x = -\dfrac{1}{2}$, но $x = -\dfrac{1}{2}$ не входит в указанную область [0; 2]. Рассматриваем только $x = 1$, а $y = 2 \cdot 1^2 = 2$, точка $P(1;\ 2)$ была уже отмечена. Находим $z(0;\ 0) = 6$, и значение z в точке $A(2;\ 8)$, т.е. $z(2;\ 8) = -10$: $z_{\text{наим.}} = -10$, $z_{\text{наиб.}}(1;\ 2) = 11$.

На участке AB: $y = 8$, $z = 3x^2 - 30x + 38$ при $0 \le x \le 2$. $z'_x = 6x - 30$, $z'_x = 0$ при $x = 5$ – это значение не входит в область [0; 2].

Находим значение z в точке B, т.е. $z(0;\ 8) = 38$;
$z_{\text{наим.}}(2{,}8) = -10$; $z_{\text{наиб.}} = 38$ в точке B.

На участке BO: $x = 0$, $z = 4y + 6$ при $0 \le y \le 8$. По виду $z = 4y + 6$ устанавливаем, что эта функция растет на [0; 8] и поэтому находим сразу значение z в точках B и O:
$z(0;\ 8) = 38$, $z(0;\ 0) = 6$.

3. Сравнивая найденные значения z, заключаем:
$z_{\text{наиб.}} = 38$ в точке $B(0;\ 8)$; $z_{\text{наим.}} = -10$ в точке $A(2;\ 8)$.

Глава 6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные формулы интегрирования

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Отыскание функции $F(x)$ по ее производной (дифференциалу) называется интегрированием.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга на постоянную.

Определение 2. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Свойства неопределенного интеграла:

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$ или $d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2) $\int F'(x)dx = F(x) + C$ или $\int dF(x) = F(x) + C$;

3) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла;

4) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, т.е. интеграл от алгебраической суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых.

Основные формулы интегрирования

$$1. \int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$$

$$3. \int a^{u} du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C;$$

$$4. \int e^{u} du = e^{u} + C;$$

$$5. \int \sin u du = -\cos u + C;$$

$$6. \int \cos u du = \sin u + C;$$

$$7. \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;.$$

$$8. \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$$

$$9. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$$

$$10. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$$

$$11. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$$

$$12. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C.$$

В этих формулах a и α постоянны, а u – независимая переменная или любая дифференцируемая функция от независимой переменной.

Найти интегралы:

Пример 1. $\int\left(6x^3-\frac{3x}{\sqrt[3]{x}}+4x\cdot\sqrt[5]{x}-2+\frac{5}{x}\right)dx=J$.

Преобразуем подынтегральную функцию и воспользуемся свойствами 2, 3, и 4):

$$J=6\int x^3dx-3\int x^{1-\frac{1}{3}}dx+4\int x^{1+\frac{1}{5}}dx-2\int dx+5\int\frac{dx}{x}=6\frac{x^{3+1}}{3+1}-$$

$$-3\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-4\frac{x^{\frac{6}{5}+1}}{\frac{6}{5}+1}-2x+5\ln|x|+C=\frac{3}{2}x^4-\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{20}{11}x^{\frac{11}{5}}-2x+$$

$$+5\ln|x|+C=\frac{3}{2}x^4-\frac{9}{5}x\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{20}{11}x^2\cdot\sqrt[5]{x}-2x+5\ln|x|+C.$$

(Использовали табличные интегралы 1 и 2).

Пример 2.

$$\int\frac{3\sqrt{x}-x\sin x}{x}dx=\int(3x^{\frac{1}{2}-1}-\sin x)dx=3\int x^{-\frac{1}{2}}dx-\int\sin xdx=$$

$$=3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\cos x+C=6\sqrt{x}+\cos x+C.$$

§2. Интегрирование методом внесения под знак дифференциала

Из определения дифференциала и таблицы производных следуют следующие формулы .

Таблица дифференциалов

1) $dx = d(x + c)$;

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$;

3) $xdx = \frac{1}{2} dx^2$;

4) $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3$;

5) $x^n dx = \frac{1}{n+1} dx^{n+1}$;

6) $\frac{dx}{x} = d\ln|x|$;

7) $a^x dx = \frac{da^x}{\ln a}$;

8) $e^x dx = de^x$;

9) $\cos x dx = d\sin x$;

10) $\sin x dx = -d\cos x$;

11) $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\,\mathrm{tg}\,x$;

12) $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\,\mathrm{ctg}\,x$;

13) $\frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} d\,\mathrm{arctg}\,x; \\ -d\,\mathrm{arcctg}\,x; \end{cases}$

14) $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} d\arcsin x; \\ -d\arccos x. \end{cases}$

Пример 1. Найти интеграл $\int (2x+3)^{11} dx$.

$$\int (2x+3)^{11} dx = \left| dx = \frac{1}{2} d(2x+3) \right| = \frac{1}{2} \int (2x+3)^{11} d(2x+3) =$$

$$\frac{1}{2} \frac{(2x+3)^{12}}{12} + C = \frac{(2x+3)^{12}}{24} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \left| \cos x dx = d\sin x \right| = \int (\sin x)^2 \cdot d\sin x =$$

$$= \frac{(\sin x)^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

$$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \left| e^x dx = d(e^x) \right| = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int e^{x^3} x^2 dx$.

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \left| x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3 \right| = \frac{1}{3} \int e^{x^3} dx^3 = \frac{1}{3} e^{x^3} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x} = \left| \frac{dx}{x} = d \ln x \right| = \int (\ln x)^{\frac{1}{2}} d \ln x = \frac{(\ln x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\ln^3 x} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{\cos x dx}{3+5\sin x}$.

$$\int \frac{\cos x dx}{3+5\sin x} = \left| \cos x dx = d \sin x \right| = \int \frac{d \sin x}{3+5\sin x} =$$

$$= \frac{1}{5} \int \frac{d(3+5\sin x)}{3+5\sin x} = \frac{1}{5} \ln|3+5\sin x| + C.$$

§3. Метод подстановки (замены переменной)

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

2) $u = \psi(x)$, где u – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(u)du\,.$$

Замечание. Очевидно, что метод внесения под знак интеграла и второй вид подстановки практически один и тот же.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, результат интегрирования проверить дифференцированием.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \left| \begin{array}{ll} \sqrt{1+e^x} = z & x = \ln(z^2-1) \\ (1+e^x) = z^2 & dx = d(\ln(z^2-1)) \\ e^x = z^2 - 1 & dx = \dfrac{1}{z^2-1} \cdot 2zdz \end{array} \right| = \int \frac{2zdz}{z(z^2-1)} =$$

$$= 2\int \frac{dz}{(z^2-1)} = \ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.$$

Проверка:

$$\left(\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C\right)' = \frac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right)' =$$

$$=\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x(\sqrt{1+e^x}+1)-\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\cdot e^x(\sqrt{1+e^x}-1)}{(\sqrt{1+e^x}+1)^2}=$$

$$=\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}(\sqrt{1+e^x}+1-\sqrt{1+e^x}+1)}{(\sqrt{1+e^x}+1)(\sqrt{1+e^x}-1)}=$$

$$=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}(e^x+1-1)}=\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}.$$

Верно!

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$.

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\left|\begin{array}{ll} 1+\cos^2 x=z & 2\cos x\cdot(-\sin x)dx=dz \\ d(1+\cos^2 x)=dz & -\sin 2xdx=dz \\ (1+\cos^2 x)'dx=dz & \sin 2xdx=-dz \end{array}\right|=$$

$$=-\int\frac{dz}{\sqrt{z}}=-\int z^{-\frac{1}{2}}dz=-\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-2\sqrt{z}+C=-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C.$$

§4. Интегрирование по частям

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv = u\cdot v-\int vdu$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью этой формулы $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int v du$. Применение этой формулы нужно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, например, для интегралов $\int P(x)\,a^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\,e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\sin\alpha x dx$, $\int P(x)\cos\alpha x dx$, где $P(x)$ – многочлен, за u следует принять $P(x)$, а за dv – соответственно выражения $a^{\alpha x}dx$, $e^{\alpha x}dx$, $\sin\alpha x dx$, $\cos\alpha x dx$; для интегралов вида $\int P(x)\ln\alpha x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\, x dx$ за u принимается соответственно функции $\ln\alpha x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}\, x$, а за dv – $P(x)dx$.

Пример 1. Найти интеграл $\int (3-2x)\sin\frac{x}{2}dx$.

$$\int (3-2x)\sin\frac{x}{2}dx = \begin{vmatrix} u = 3-2x & du = u'dx = (3-2x)'dx = -2dx \\ dv = \sin\frac{x}{2}dx & v = \int dv = \int \sin\frac{x}{2}dx = -2\cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= -2(3-2x)\cos\frac{x}{2} - \int\left(-2\cos\frac{x}{2}\right)\cdot(-2dx) = (4x-6)\cos\frac{x}{2} -$$

$$-4\int\cos\frac{x}{2}dx = (4x-6)\cos\frac{x}{2} - 8\sin\frac{x}{2} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \arcsin x dx$, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

$$\int \arcsin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & du = (\arcsin x)' dx = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx & v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{array}{ll} 1 - x^2 = z & (1-x^2)' dx = dz \\ & -2xdx = dz \\ d(1-x^2) = dz & xdx = -\dfrac{1}{2} dz \end{array} \right| =$$

$$x\arcsin x - \int \frac{-\frac{1}{2}dz}{\sqrt{z}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}} dz = x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Проверка:

$$(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C)' = x' \arcsin x + x(\arcsin x)' +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Верно!

Пример 3. Найти интеграл $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

Пусть $J = \int e^{2x} \cos 3x\, dx$.

$$J = \int e^{2x} \cos 3x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x} & du = (e^{2x})' dx = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos 3x\, dx & v = \int \cos 3x dx = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right| =$$

$$=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x\cdot 2e^{2x}dx=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\int e^{2x}\cdot\sin 3xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} du=2e^{2x}dx \\ v=\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x\end{matrix}\right|=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x-\frac{2}{3}\left[-\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x-\right.$$

$$\left.-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2e^{2x}dx\right]=$$

$$=\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x+\frac{2e^{2x}}{9}\cos 3x-\frac{4}{9}\int e^{2x}\cdot\cos 3xdx.$$

Итак, $J=\dfrac{e^{2x}}{9}(3\sin 3x+2\cos 3x)-\dfrac{4}{9}J+C$.

Решаем уравнение относительно J.

$$\frac{13}{9}J=\frac{e^{2x}}{9}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$$

Таким образом.

$$\int e^{2x}\cos 3xdx=\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C.$$

§5. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется отношение многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ степеней n и m соответственно.

Рациональная дробь называется правильной, если $n < m$, в противном случае она называется неправильной.

Простейшими дробями называются правильные дроби вида

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^m}$; III. $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ ($ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней).

Пример 1. Найти интеграл $\int \dfrac{3dx}{x-4}$.

$$\int \frac{3dx}{x-4} = 3\int \frac{d(x-4)}{x-4} = 3\ln|x-4| + C .$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \dfrac{7dx}{(x-5)^5}$.

$$\int \frac{7dx}{(x-5)^5} = 7\int (x-5)^{-5} d(x-5) = 7\frac{(x-5)^{-4}}{-4} + C = -\frac{7}{4(x-5)^4} + C.$$

Подробно остановимся на интегралах III типа, заметим, что $\int \dfrac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ интегрируются таким же способом и объединяются в общий класс функций (функции, содержащие квадратный трехчлен).

Пример 3. Найти интеграл $\int \dfrac{3x-1}{x^2-6x+10}dx$, результат интегрирования проверить дифференцированием.

Прежде чем перейти к интегрированию, сделаем следующие «заготовки»:

1) найдем дифференциал от квадратного трехчлена:

$$d(x^2 - 6x + 10) = (x^2 - 6x + 10)'dx = (2x - 6)dx;$$

2) преобразуем числитель $3x - 1 = \frac{3}{2}(2x - 6) + 8$;

3) выделим полный квадрат в квадратном трехчлене

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 10 = (x - 3)^2 + 1.$$

$\int \frac{3x-1}{x^2-6x+10}dx =$ | применяем «заготовку» (2) | =

$$\int \frac{\frac{3}{2}(2x-6)+8}{x^2-6x+10}dx = \frac{3}{2}\int \frac{(2x-6)dx}{x^2-6x+10} + 8\int \frac{dx}{x^2-6x+10} =$$

| к 1-му интегралу применяем (1), ко 2-му интегралу применяем (3) |

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2-6x+10)}{x^2-6x+10} + 8\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+1} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x^2-6x+10| + 8\,\mathrm{arctg}(x-3) + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{2}\ln|x^2-6x+10| + 8\,\mathrm{arctg}\left(x-3\right) + C\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{x^2-6x+10}(x^2-6x+10)' + 8 \cdot \frac{1}{(x-3)^2+1} \cdot (x-3)' =$$

$$= \frac{3(2x-6)}{2(x^2-6x+10)} + \frac{8}{(x-3)^2+1} = \frac{3x-9+8}{x^2-6x+10} = \frac{3x-1}{x^2-6x+10}.$$

Чтобы найти интеграл от любой рациональной дроби, нужно:

1) если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть, т.е. представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M_k(x) + \frac{R_{n_1}(x)}{Q_m(x)},\ n \geq m,\ n_1 < m;$$

2) разложить знаменатель $Q_m(x)$ на простейшие действительные множители. По основной теореме алгебры это разложение может содержать линейные и квадратные множители:

$$Q_m(x) = (x-a)^p \ldots (x-b)^l \cdot (x^2+px+q)^t \ldots (x^2+cx+d)^r,$$

$$p + \ldots + l + t + \ldots = m;$$

3) написать схему разложения данной дроби на простейшие слагаемые дроби в следующем виде:

$$\frac{R_{n_1}(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} +$$

$$+ \ldots + \frac{B_l}{(x-b)^l} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_tx+N_t}{(x^2+px+q)^t} +$$

$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2} + \ldots + \frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r}. \qquad (*)$$

Заметим, что квадратные трехчлены x^2+px+q и x^2+cx+d не имеют действительных корней;

4) привести к общему знаменателю правую часть равенства (*). Получим две дроби, у которых знаменатели равны, приравняем числители. Из равенства двух многочленов найдем значение коэффициентов (способы их нахождения посмотрим на примерах).

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x}dx$ и результат проверить дифференцированием.

Замечаем, что в числителе стоит многочлен порядка 4, в знаменателе – порядка 3, т.е. дробь неправильная. Выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель:

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 7 & x^3 + 5x^2 + 6x \\
\cline{2-2}
- \;\; x^4 + 5x^3 + 6x^2 \qquad & x - 1 \\
\cline{1-1}
-x^3 - 4x^2 - 7 \quad & \\
- \;\; -x^3 - 5x^2 - 6x \quad & \\
\cline{1-1}
x^2 + 6x - 7 &
\end{array}
$$

Итак, $\frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x} = x-1+\frac{x^2+6x-7}{x^3+5x^2+6x}$.

Разложим на линейные множители $x^3 + 5x^2 + 6x$:

$x^3 + 5x^2 + 6x = x(x^2 + 5x + 6) = x(x + 2)(x + 3)$,

т.к. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Разложим дробь $\frac{x^2+6x-7}{x^3+5x^2+6x}$ на простейшие слагаемые:

$$\frac{x^2+6x-7}{x(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x+3} =$$

$$= \frac{A(x+2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x+2)}{x(x+2)(x+3)}.$$

Знаменатели равны, приравняем числители:

$x^2 + 6x - 7 = A(x + 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x + 2)$.

Если два многочлена равны, то они равны при любых значениях x. Подставим в последнее равенство $x = 0$, $x = -2$,
$x = -3$, соответственно.

При $x = 0$: $-7 = 6A \Rightarrow A = -\frac{7}{6}$,

при $x = -2$: $-15 = -2B \Rightarrow B = \frac{15}{2}$,

при $x = -3$: $-16 = 3C \Rightarrow C = -\frac{16}{3}$.

Итак, подынтегральную дробь можно представить в виде:

$$\frac{x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 7}{x^3 + 5x^2 + 6x} = x - 1 + \frac{-\frac{7}{6}}{x} + \frac{\frac{15}{2}}{x+2} + \frac{-\frac{16}{3}}{x+3}.$$

Найдем интеграл

$$\int\left(x - 1 - \frac{\frac{7}{6}}{x} + \frac{\frac{15}{2}}{x+2} - \frac{\frac{16}{3}}{x+3}\right)dx =$$

$$= \int x\,dx - \int dx - \frac{7}{6}\int\frac{dx}{x} + \frac{15}{2}\int\frac{d(x+2)}{x+2} - \frac{16}{3}\int\frac{d(x+3)}{x+3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x - \frac{7}{6}\ln|x| + \frac{15}{2}\ln|x+2| - \frac{16}{3}\ln|x+3| + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{7}{6}\ln|x| + \frac{15}{2}\ln|x+2| - \frac{16}{3}\ln|x+3| + C\right)' =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2x-1-\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{x}+\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{x+2}-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{x+3}=$$

$$=x-1-\frac{7}{6x}+\frac{15}{2(x+2)}-\frac{16}{3(x+3)}=$$

$$=\frac{6x(x-1)(x+2)(x+3)-7(x+2)(x+3)+15\cdot 3x(x+3)-16\cdot 2x(x+2)}{6x(x+2)(x+3)}=$$

$$=\frac{6x^4+30x^3+36x^2-6x^3-30x^2-36x-7x^2-35x-42+45x^2}{6x(x+2)(x+3)}+$$

$$+\frac{135x-32x^2-64x}{6x(x+2)(x+3)}=\frac{6x^4+24x^3+12x^2-42}{6x(x+2)(x+3)}=\frac{x^4+4x^3+2x^2-7}{x^3+5x^2+6x}.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x(x+1)^2}$.

Разложим подынтегральную функцию на простейшие слагаемые:

$$\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}.$$

Знаменатели дробей равны, приравняем числители:

$$1 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + Cx.$$

Подставим в равенство $x = 0$ и $x = -1$.

При $x = 0$: $1 = A \Rightarrow A = 1$, при $x = -1$: $1 = -C \Rightarrow C = -1$.

Для определения B приравняем, например, коэффициенты при x^2, так как если два многочлена равны, то равны и коэффициенты при одинаковых степенях x.

x^2: $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$.

Итак, подынтегральную функцию можно представить в виде $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$, тогда

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{d(x+1)}{x+1} - \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \ln|x| - \ln|x+1| -$$

$$-\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{x^3-1}{4x^3+x}dx$.

Подынтегральное выражение – неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть:

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{l} x^3-1 \\ x^3+x/4 \end{array} & \begin{array}{l} 4x^3+x \\ \hline 1/4 \end{array} \\
\cline{1-1}
-x/4-1 &
\end{array}$$

Итак, $\frac{x^3-1}{4x^3+x} = \frac{1}{4} + \frac{-\frac{1}{4}x-1}{4x^3+x}$.

Разложим $\frac{-\frac{1}{4}x-1}{4x^3+x}$ на простейшие слагаемые дроби:

$$\frac{-\frac{1}{4}x-1}{x(4x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{4x^2+1} = \frac{A(4x^2+1)+Bx^2+Cx}{x(4x^2+1)}.$$

Знаменатели дробей равны, приравняем числители

$$-\frac{1}{4}x - 1 = 4Ax^2 + A + Bx^2 + Cx.$$

Два многочлена равны, значит, равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравняем коэффициенты при x^2, x, x^0 (свободный член).

x^2: $0 = 4A + B \Rightarrow B = -4A \Rightarrow B = 4$,

x: $-\frac{1}{4} = C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$,

x^0: $-1 = A \Rightarrow A = -1$.

Итак,

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3+x}dx = \int\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x}+\frac{4x-\frac{1}{4}}{4x^2+1}\right)dx = \frac{1}{4}\int dx - \int\frac{dx}{x} + 4\int\frac{xdx}{4x^2+1} -$$

$$-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{4x^2+1} = \frac{1}{4}x - \ln|x| + 4\int\frac{\frac{1}{2}dx^2}{4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{16}\int\frac{dx}{x^2+\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}x -$$

$$-\ln|x| + \frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\operatorname{arctg}2x =$$

$$= \frac{1}{4}x - \ln|x| + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+\frac{1}{4}\right| - \frac{1}{8}\operatorname{arctg}2x + C.$$

§6. Интегрирование тригонометрических выражений

1. Интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция.

Универсальная тригонометрическая подстановка $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$ приводит интегралы такого типа к интегралам от рациональной функции. В результате этой подстановки имеем: $\dfrac{x}{2} = \mathrm{arctg}\, t \Rightarrow$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\, t \Rightarrow dx = (2\,\mathrm{arctg}\, t)'dt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 1. Найти интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$.

$$\int\frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x} = \left|\begin{array}{ll} t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2}, & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right| =$$

$$= \int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\dfrac{10t}{1+t^2}+\dfrac{3-3t^2}{1+t^2}\right)} = \int\frac{2dt}{3+3t^2+10t+3-3t^2} =$$

$$= \int\frac{2dt}{2(3+5t)} = \frac{1}{5}\int\frac{d(5t+3)}{5t+3} = \frac{1}{5}\ln|5t+3|+C =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|5\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3\right|+C.$$

2. Интеграл вида $\int\sin^m x\cdot\cos^n x dx$.

Рассмотрим три случая:

1) по крайней мере, один из показателей m или n – нечетное положительное число. Если n – нечетное, то подстановка $\sin x = t$, если m, то $t = \cos x$.

Пример 2. Найти интеграл $\int \sin^3 x dx$.

$$\int \sin^3 x\, dx = \left| \begin{matrix} \cos x = t & \sin x\, dx = -dt \\ d\cos x = dt & \sin^3 x\, dx = \sin^2 x \cdot \sin x\, dx = \\ -\sin x\, dx = dt & = (1-\cos^2 x)\sin x\, dx \end{matrix} \right| =$$

$$= \int (1-t^2)(-dt) = \int t^2 dt - \int dt = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C;$$

2) оба показателя m и n – четные положительные числа. Для понижения степени подынтегральной функции применяем формулы:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \cos^4 x dx$.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{2}{4}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\int \cos 2x d2x + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\int \cos 4x d4x =$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;$$

3) m, n – четные целые числа, но хотя бы одно из них отрицательно. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$, тогда $x = \operatorname{arctg} t$, откуда $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

Используем известные тригонометрические формулы:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \ \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

Пример 4. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx = \left| \begin{array}{ll} t = \operatorname{tg} x, & \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}, \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, & \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{1}{1+t^2} \cdot \dfrac{dt}{1+t^2}}{\left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^2} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4}dt = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3\operatorname{tg}^3 x} + C.$$

3. Интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x)dx$ приводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = \operatorname{tg} x$.

Пример 5. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^5 x dx$.

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^5 \cdot dt}{t^2+1} = \text{| выделим целую часть |} =$$

$$= \int \left(t^3 - t + \frac{t}{t^2+1} \right) dt = \int t^3 dt - \int t dt + \int \frac{t dt}{t^2+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} -$$

$$- \frac{1}{2} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + C.$$

4. Интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx dx \text{ и } \int \cos mx \cdot \cos nx dx.$$

При нахождении интегралов такого типа применяются формулы:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \sin 10x \cdot \cos 15x dx$.

$$\int \sin 10x \cdot \cos 15x dx = \frac{1}{2} \int [\sin 25x + \sin(-5x)] dx =$$

$$\frac{1}{50}\int \sin 25x d 25x - \frac{1}{10}\int \sin 5x d 5x = -\frac{1}{50}\cos 25x + \frac{1}{10}\cos 5x + C.$$

§7. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональные функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Мы рассмотрим два из них:

а) интеграл $\int R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}...)dx$, где R – рациональная функция, $\alpha = \frac{m_1}{n_1}$, $\beta = \frac{m_2}{n_2}$,... – рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$x = t^k$, где k – общий знаменатель всех дробных показателей x;

б) интегралы $\int R[x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta}...]dx$ или $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, ...\right]dx$ приводятся к рациональному виду аналогично случаю а) с помощью подстановок $ax + b = t^k$ или $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

В этом примере $x^{\frac{1}{3}}$ и $x^{\frac{1}{2}}$, общий знаменатель $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ равен 6, поэтому подстановка $x = t^6$.

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \Rightarrow t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = \sqrt{t^6} = t^3 \quad \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{t^6} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} =$$

$$= 6\int \frac{t^2}{t^2+1} dt = \text{| выделим целую часть |} = 6\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 6\int dt - 6\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t - 6\,\mathrm{arctg}\, t + C = 6 \cdot \sqrt[6]{x} - 6\,\mathrm{arctg}\, \sqrt[6]{x} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \sqrt{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Сделаем подстановку

$\sqrt{\frac{x-2}{x}} = t \Rightarrow \frac{x-2}{x} = t^2 \Rightarrow (x-2) = xt^2$, отсюда выразим x: $x = \frac{2}{1-t^2}$, дальше найдем dx.

$$dx = \left(\frac{2}{1-t^2}\right)' dt \Rightarrow dx = 2(-(1-t^2)^{-2})(1-t^2)' dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = -\frac{2}{(1-t^2)^2} \cdot (-2t) dt \Rightarrow dx = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}.$$

Тогда

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x}} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{t \cdot \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}}{\frac{2}{1-t^2}} = \int \frac{2t^2 dt}{1-t^2} = -2\int \frac{t^2}{t^2-1} dt =$$

$$= |\text{ выделим целую часть }| = -2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt =$$

$$= -2\int dt - 2\int\frac{dt}{t^2-1} = -2t - \frac{2}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -2\sqrt{\frac{x-2}{x}} -$$

$$-\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x-2}{x}}-1}{\sqrt{\frac{x-2}{x}}+1}\right| + C = -2\sqrt{\frac{x-2}{x}} - \ln\left|\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}\right| + C.$$

Глава 7. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Определение, основные свойства и вычисление определенных интегралов

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разделим отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, выберем на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ произвольную точку c_k, найдем значение функции в этих точках и длину каждого отрезка $\triangle x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение 1. Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется сумма вида

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Определение 2. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (или в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из отрезков ($\max \Delta x_k$) стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma_n = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Теорема (существования определенного интеграла).

Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Если $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ и $x = b$.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$

5. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$, c – постоянная.

6. Оценка определенного интеграла: Если m, M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на $[a,b]$, то

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$$

7. Теорема о среднем значении. Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Правила вычисления определенных интегралов

1. Формула Ньютона-Лейбница:

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$ где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$.

2. Интегрирование по частям:

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$$

3. Замена переменной:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

где $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \le t \le \beta$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $f[\varphi(t)]$ – функция, непрерывная на $[\alpha, \beta]$.

4. Если $f(x)$ – нечетная функция, т.е. $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$$

5. Если $f(x)$ – четная функция, т.е. $f(-x) = f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\cdot\int\limits_0^a f(x)dx$$

В примерах 1–5 вычислить определенные интегралы.

1. $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2+2x+2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(x^2+2x+1)+1}=\int_{-1}^{0}\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1}=$$

$$=\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_{-1}^{0}=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

2. $\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^3 x dx$.

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos^3 x dx=\int_{0}^{\pi/2}\cos^2 x(\cos x dx)=\int_{0}^{\pi/2}(1-\sin^2 x)d\sin x=$$

$$=\int_{0}^{\pi/2}d\sin x-\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 x d\sin x=\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}-\frac{\sin^3 x}{3}\Bigg|_{0}^{\pi/2}=$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0-\frac{1}{3}\sin^3\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}\sin^3 0=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

3. $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение: Переходим к новой переменной интегрирования, полагая $x = t^2$ $(t > 0)$. При $x = 0$ $t = 0$, а при $x = 4$ $t = 2$.

Функция $x = t^2$ монотонна, непрерывна и имеет непрерывную производную $x' = 2t$ на отрезке $[0; 2]$. Поэтому, используя формулу замены переменной, имеем:

$$\int_{0}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_{0}^{2}\frac{2tdt}{1+t}=2\int_{0}^{2}\frac{tdt}{1+t}=2\int_{0}^{2}\frac{t+1-1}{t+1}dt=2\int_{0}^{2}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=$$

$$=2(t-\ln|t+1|)\Big|_{0}^{2}=2(2-\ln 3+\ln 1)=4-2\ln 3.$$

4. $\int\limits_0^3 x \operatorname{arctg} x dx$.

$$\int\limits_0^3 x \operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x; & du = \dfrac{dx}{1+x^2}; \\ dv = x\, dx; & v = \int x\, dx = \dfrac{x^2}{2}. \end{array} \right| = \left(\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^3 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\int\limits_0^3 \frac{x^2 dx}{1+x^2} \right) = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - 0 - \frac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 -$$

$$-\frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x)\Big|_0^3 = \frac{9}{2}\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 = 5\operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

5. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^5 x\, dx$.

$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^5 x\, dx = 0$, т.к. подынтегральная функция $\sin^5 x$ является функцией нечетной.

§2. Несобственные интегралы

Понятие определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x) dx$ введено для случая, когда промежуток интегрирования $[a, b]$ конечен, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Данное понятие можно обобщить на случай, когда промежуток интегрирования бесконечен или подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв на $[a, b]$.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (интегралы I рода) определяются посредством предельного перехода:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx =$$

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Несобственные интегралы от функции с бесконечными разрывами на $[a, b]$ (интегралы II рода) вводятся также с помощью предельного перехода.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$ и непрерывна во всех других точках промежутка $(a, b]$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$,

$(\varepsilon > 0)$.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$ и непрерывна во всех других точках промежутка $[a, b)$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$,

$(\varepsilon > 0)$.

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = c,\ c \in [a, b]$, а в остальных точках отрезка $[a, b]$ непрерывна, то

$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim\limits_{\delta\to 0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx$, где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ и изменяются независимо друг от друга.

Если все указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае – расходящимися.

В примерах 1–3 исследовать несобственные интегралы на сходимость и найти их значение в случае, если они сходятся.

1. $\int\limits_e^{\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$.

$$\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_e^{b}\frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_e^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to\infty}\ln\ln x\Big|_e^b =$$

$= \lim\limits_{b\to\infty}(\ln\ln b - \ln\ln e) = \infty$, т.к. $y = \ln x$ – функция возрастающая, и при $b\to\infty$ $\ln b\to\infty$ и $\ln\ln b\to\infty$.

Так как предел бесконечен, значит, исходный интеграл расходится.

2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}$.

По определению несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1} + \int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^{0}\frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b}\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b = \lim_{a\to-\infty} (\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a) +$$

$$+ \lim_{b\to\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

т.к. при $x \to \infty$ $\operatorname{arctg} x \to \dfrac{\pi}{2}$ и при $x \to -\infty$ $\operatorname{arctg} x \to -\dfrac{\pi}{2}$.

Значит, интеграл сходится к числу π.

3. $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

Функция $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 4$ (знаменатель дроби обращается в нуль), в остальных точках отрезка [2; 6] $f(x)$ непрерывна.

Воспользуемся определением несобственного интеграла.

$$\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} = \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} + \int_4^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0} \int_2^{4-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to0} \int_{4+\varepsilon_2}^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-4)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0} \int_2^{4-\varepsilon_1} (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx + \lim_{\varepsilon_2\to0} \int_{4+\varepsilon_2}^6 (x-4)^{-\frac{2}{3}} dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0} (3\cdot\sqrt[3]{x-4})\Big|_2^{4-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to0} (3\cdot\sqrt[3]{x-4})\Big|_{4+\varepsilon_2}^6 =$$

$$= 3\lim_{\varepsilon_1\to0} (\sqrt[3]{4-\varepsilon_1-4} - \sqrt[3]{2-4}) + 3\lim_{\varepsilon_2\to0} (\sqrt[3]{6-4} - \sqrt[3]{4+\varepsilon_2-4}) =$$

$= 3 \cdot \sqrt[3]{2} + 3 \cdot \sqrt[3]{2} = 6 \cdot \sqrt[3]{2}.$

Данный несобственный интеграл сходится.

§3. Геометрические приложения определенных интегралов

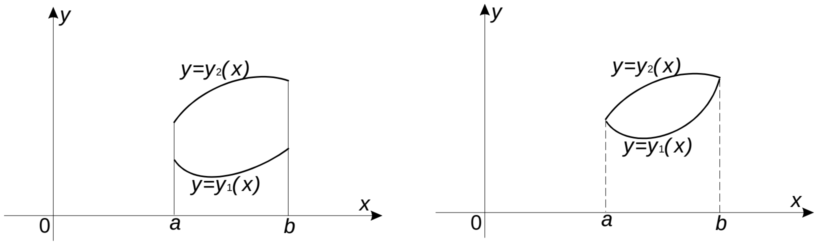
Вычисление площадей

1. Декартовы координаты

Если плоская фигура ограничена прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$ ($a \le x \le b$), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

В отдельных случаях левая граница $x = a$ (или правая граница $x = b$) может выродиться в точку пересечения кривых $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$. В этих случаях величины a и b отыскиваются как абсциссы точек пересечения указанных кривых.



2. Параметрическое задание кривых

Если граница фигуры задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

то площадь фигуры вычисляется по одной из трех формул:

$$S = -\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt; \quad S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt; \quad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (xy' - yx')dt,$$

где α и β – значения параметра t, соответствующие началу и концу обхода контура в положительном направлении (при котором фигура остается слева).

3. Полярные координаты

Площадь сектора, ограниченного дугой $r = r(\varphi)$ и лучами

$\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, находим по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi .$$

Вычисление длины кривой

1. Декартовы координаты

Уравнение кривой $y = y(x)$ и $y'(x)$ – непрерывная функция, то $l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + (y')^2}dx$ – длина участка кривой, соответствующая изменению x в промежутке $[a, b]$.

2. Параметрическое задание кривых

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \; t_1 \le t \le t_2,$$

$x'(t)$, $y'(t)$ – непрерывные функции, то

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt$$ – длина участка кривой при $t \in [t_1, t_2]$.

3. Полярные координаты

Пусть $r = r(\varphi)$, то

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi,\ \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2].$$

Вычисление объемов тел

1. Декартовы координаты

Если известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, и a и b – соответственно левая и правая границы изменения x, то объем тела выражается интегралом $V = \int_a^b S(x)dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $(f(x) \geq 0)$, $y = 0$; $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, выражается интегралом

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Если же фигура, ограниченная линиями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $(0 \leq y_1(x) \leq y_2(x))$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения выражается интегралом

$$V = \pi\int_a^b (y_2^2(x) - y_1^2(x))dx.$$

Если вращение происходит вокруг оси Oy и $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$, $0 \leq x_1(y) \leq x_2(y)$, $y = a$ и $y = b$, то

$$V=\pi\int_a^b (x_2^2(y)-x_1^2(y))dy .$$

2. Параметрическое задание функции

Кривая $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$ вращается вокруг оси Ox, объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)\cdot x'(t)dt .$$

3. Полярные координаты

Объем тела, полученный при вращении сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси, вычисляется по формуле

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi d\varphi .$$

Поверхность тела вращения

1. Декартовы координаты

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги L кривой $y = y(x)$ ($a \le x \le b$), выражается интегралом

$$S=2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}dx .$$

2. Параметрическое задание функции

Если кривая задана параметрическими уравнениями:

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, то $S = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(y(t)\big(\sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt$.

3. Полярные координаты

Если кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, то $S = 2\pi \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r \sin\varphi \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$.

Вычисление моментов и координат центра тяжести

С помощью определенного интеграла можно вычислять статические моменты, моменты инерции и координаты центра тяжести однородных (плотность – величина постоянная) фигур и линий.

Например, статические моменты криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx; \quad M_y = \int\limits_a^b xydx.$$

Координаты центра тяжести вычисляются по формулам

$$x_{ц.т.} = \frac{M_y}{m} = \frac{\int\limits_a^b xydx}{\int\limits_a^b ydx}; \quad y_{ц.т.} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b y^2 dx}{\int\limits_a^b ydx}$$

(плотность полагаем равной единице).

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$. Сделать чертеж.

Найдем точки пересечения данных парабол, для этого решим систему из их уравнений:

$$\begin{cases} 1)\, y = x^2 - 2x, \\ 2)\, y = 4 - x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 - 2x = 4 - x^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ 2x^2 - 2x - 4 = 0. \end{cases}$$

Найдем корни уравнения $2x^2 – 2x – 4 = 0$ или $x^2 – x – 2 = 0$. $x_1 = 2$, $x_2 = –1$.

Тогда $y_1 = 2^2 – 2·2 = 0$,

$y_2 = (–1)^2 – 2·(–1) = 3$.

Получим две точки пересечения (2, 0) и (–1, 3).

Для построения схематического чертежа найдем вершины парабол:

1) $y = x^2 – 2x$ (ветви направлены вверх);

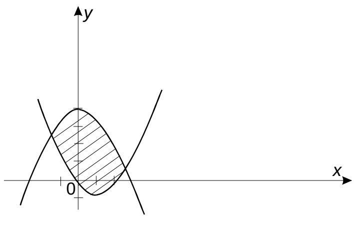
$y' = 2x – 2$, $2x – 2 = 0$, $x = 1$;

$y(1) = 1^2 – 2·1 = –1 \Rightarrow$ точка (1, –1) – вершина параболы;

2) $y = 4 – x^2$ (ветви направлены вниз);

$y' = –2x$, $–2x = 0$, $x = 0$;

$y(0) = 4 – 0 = 4 \Rightarrow$ (0, 4) – вершина параболы.



Находим площадь по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.$

$$S=\int_{-1}^{2}[4-x^2-(x^2-2x)]dx=\int_{-1}^{2}(4+2x-2x^2)dx=4x\Big|_{-1}^{2}+$$

$$+2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{2}-2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}=4\cdot(2-(-1))+(4-(-1)^2)-\frac{2}{3}\cdot(8-(-1)^3)=$$

$$=12+3-6=9\quad eg^2.$$

Пример 2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$, $2x + 2y – 3 = 0$.

Найдем точки пересечения параболы $y=\frac{x^2}{2}$ и прямой $y=\frac{3-2x}{2}$. Решаем систему из уравнений этих кривых:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}, \\ y=\dfrac{3}{2}-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}, \\ \dfrac{x^2}{2}=\dfrac{3}{2}-x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2}, \\ x^2+2x-3=0. \end{cases}$$

Найдем корни уравнения $x^2 + 2x – 3 = 0$.

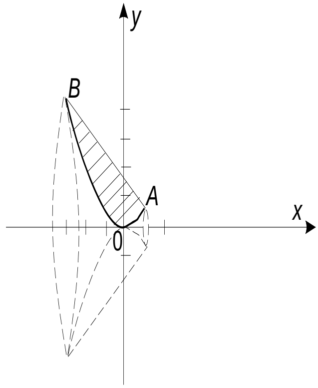
$x_1 = –3$, $x_2 = 1$ и значения функций в этих точках:

$y(–3) = \frac{(-3)^2}{2}=\frac{9}{2}$ и $y(1) = \frac{1}{2}$.

Получены точки пересечения

$A(1, \frac{1}{2})$ и $B(–3, \frac{9}{2})$.

Прямую проведем через точки A и B, для построения параболы учтем, что вершиной параболы является точка начала координат (0, 0).



Найдем объем тела, полученного вращением фигуры вокруг оси Ox по формуле $V = \pi\int\limits_a^b (y_2^2 - y_1^2)dx$.

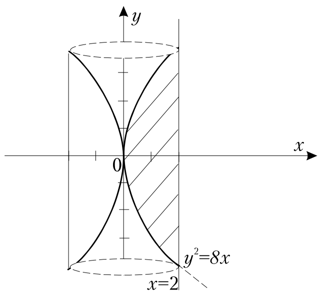
$$V = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left[\left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - \left(\frac{x^2}{2}\right)^2\right]dx = \pi\int\limits_{-3}^{1}\left(\frac{9}{4} - 3x + x^2 - \frac{x^4}{4}\right)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{9}{4}x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{20}\right)\Bigg|_{-3}^{1} =$$

$$= \pi\left[\frac{9}{4}(1+3) - \frac{3}{2}(1-9) + \frac{1}{3}(1+27) - \frac{1}{20}(1+243)\right] = 18\frac{2}{15}\pi \quad eg^3.$$

Пример 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, образованной линиями
$y^2 = 8x$ и
$x = 2$.

Парабола $y^2 = 8x$ и прямая $x = 2$ пересекаются в точках (2, 4) и (2, –4).



Найдем объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy, по формуле $V = \pi\int\limits_a^b (x_2^2 - x_1^2)dy$.

$x_1(y) = \dfrac{y^2}{8}$ и $x_2(y) = 2$.

Так как фигура вращения симметрична относительно оси Ox,

$$V = 2\pi\int\limits_0^4 \left[2^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 \right] dy = 2\pi \left(4y - \frac{y^5}{64\cdot 5} \right)\Bigg|_0^4 = \frac{128\pi}{5} eg^3.$$

Глава 8. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее произвольные производные неизвестной функции (или нескольких неизвестных функций). Вместо производных могут входить дифференциалы.

Если неизвестные функции зависят от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным; если от нескольких, то уравнение называется дифференциальным уравнением с частными производными. Здесь рассматриваются только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией таков: $\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(k)}) = 0$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей из производных, входящих в это уравнение. Например, уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^2$ – второго порядка, $y''' = \cos x$ – третьего порядка, $y' + xy = \frac{1}{\cos^2 x}$ – уравнение первого порядка.

Функция $y = \varphi(x)$ называется решением дифференциального уравнения, если последнее обращается в тождество после подстановки $y = \varphi(x)$.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является нахождение всех решений данного дифференциального уравнения. В простейших случаях эта задача сводится к вычислению интеграла.

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = f(x)$, при подстановке которой исходное дифференциальное уравнение обращается в тождество. (Если такая функция задана неявно, то она называется интегралом дифференциального уравнения).

Функция $y = 3e^{-x^2}$ является решением дифференциального уравнения $y' + 2xy = 0$, т.к. уравнение обращается в тождество после подстановки $y = 3e^{-x^2}$. Вместе с тем уравнение $y = 3e^{-x^2}$ является интегралом данного уравнения. Уравнения $\ln y + x^2 = 3$, $\ln y + x^2 = 5$ и т.д. являются интегралами данного дифференциального уравнения, а функции $y = e^{3-x^2}$, $y = e^{-x^2}$,
$y = 0$ и т.д. – его решениями.

§2. Уравнения первого порядка. Частное и общее решение

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков: $\Phi(x, y, y') = 0$.

Уравнение, разрешенное относительно y', имеет вид
$y' = f(x, y)$.

При этом предполагается, что функция $f(x, y)$ однозначно определена и непрерывна в некоторой области.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$y' = f(x, y)$ имеет бесчисленное множество решений. Линия, изображающая какой-либо интеграл дифференциального уравнения, называется интегральной кривой. Как правило, через данную точку (x_0, y_0) рассматриваемой области проходит единственная интегральная кривая. Соответствующее ей решение дифференциального уравнения называется частным решением. Совокупность всех частных решений называется общим решением. Общее решение дифференциального уравнения обычно представляют в виде некоторой функции $y = \varphi(x, C)$, где C – постоянная (константа).

Из общего решения можно получить любое частное решение при соответствующе выбранном значении C. Числа x_0, y_0 называются начальными условиями.

§3. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения с разделяющимися переменными могут быть записаны в виде $y' = f(x)g(y)$ или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0.$$

Чтобы решить такое уравнение, надо обе его части умножить или разделить на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входило только x, а в другую – только y. Затем проинтегрировать обе части.

При делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие это выражение в нуль .

§4. Однородные уравнения

Однородные уравнения могут быть представлены в виде $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, где отношение $\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$ можно представить как функцию отношения $\frac{y}{x}$.

Любое однородное уравнение подстановкой $y = tx$ (откуда $dy = t\,dx + x\,dt$) приводится к уравнению с разделяющимися переменными (см. §3).

§5. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным

Уравнения вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ при $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ приводятся к однородным подстановкой $x = u + m$, $y = v + n$, где (m, n) – точка пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если же $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то подстановка $a_1x + b_1y = t$ позволяет разделить переменные.

§6. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)$ называется линейным**.** Существует несколько методов решения этого уравнения.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Рассмотрим однородное уравнение

$y' + a(x)y = 0$. Оно решается путём разделения переменных (см. §3). Для того чтобы найти решения исходного уравнения, надо в общем решении заменить произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$. Затем выражение, полученное для y, подставить в исходное линейное уравнение и найти функцию $C(x)$.

Метод Бернулли. Решение линейного уравнения ищем в виде $y = u(x)v(x)$. Тогда исходное уравнение примет вид $\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + a(x)uv = b(x)$. В качестве $v(x)$ выбираем одно из решений уравнения $\frac{dv}{dx} + a(x)v = 0$. Тогда $u(x)$ находим из уравнения $\frac{du}{dx}v = b(x)$. Перемножая $u(x)$ и $v(x)$, получим решение линейного уравнения.

§7. Уравнение Бернулли

Уравнение вида $y' + a(x)y = b(x)y^n$, $(n \neq 1)$ называется уравнением Бернулли. Чтобы решить такое уравнение, надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$. После замены получается линейное уравнение (см. §6). Часто решение уравнения Бернулли удобней искать в виде $y = uv$, не приводя его к линейному уравнению.

§8. Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка

Теорема. Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Пусть в замкнутой области $|x - x_0| \le a$, $|y - y_0| \le b$ функции f и f'_y непрерывны. Тогда на некотором отрезке $x_0 - d \le x \le x_0 + d$ существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

§9. Поле направлений дифференциального уравнения

Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$.

Производная y' есть угловой коэффициент касательной к интегральной кривой. Поэтому, даже не решая уравнения, можно построить касательную к интегральной линии в данной точке (x_0, y_0). Множество таких касательных, соответствующих всевозможным точкам рассматриваемой области, называется полем направлений дифференциального уравнения.

Задача интегрирования данного дифференциального уравнения геометрически формулируется так: найти линии, у которых направление касательной всюду совпадает с направлением поля.

Построение поля направлений уравнения $y' = f(x, y)$ облегчается, если предварительно начертить линии равного наклона_(изоклины). Изоклиной называется линия, вдоль которой функция $f(x, y)$ имеет постоянное значение. Во всех точках какой-либо изоклины направление поля – одно и то же.

§10. Приближенное интегрирование уравнений первого порядка по методу Эйлера

Пусть дано уравнение $y' = f(x, y)$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$. Требуется найти его решение в некотором промежутке (x_0, x_n). Делим этот промежуток на n частей (равных или неравных) последовательными точками
$x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

На участке (x_0, x_1) получаем $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$, т.е. заменяем участок интегральной линии на отрезок касательной.

В точке $x = x_1$ получаем приближенное значение искомого решения $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$.

На участке (x_1, x_2) полагаем $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$.

Продолжая процесс, получаем последовательные приближенные значения

$$\left.\begin{aligned} &y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1), \\ &y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)(x - x_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}). \end{aligned}\right\}$$

Этим методом можно достичь любой требуемой точности. Но из-за больших вычислений метод Эйлера применяется лишь для грубых приближений .

§11. Уравнения второго порядка

Общий вид дифференциального уравнения второго порядка таков: $\Phi(x, y, y', y'') = 0$.

Уравнение, разрешенное относительно y'', имеет вид

$$y'' = f(x,y,y').$$

Обычно задание начальных условий $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0'$ (или $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$) определяет единственное решение уравнения.

Решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$, соответствующее заданным начальным значениям, называется частным.

Совокупность всех частных решений называется общим решением. Общее решение стараются представить в виде некоторой функции $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (C_1 и C_2 – константы), которая дала бы любое частное решение (при соответствующем выборе значений C_1 и C_2).

§12. Уравнения, допускающие понижение порядка

Иногда дифференциальное уравнение второго или более высокого порядка допускает понижение порядка. Наиболее распространены два случая.

Случай 1. Уравнение не содержит y. Тогда порядок уравнения можно понизить, взяв за новую неизвестную функцию y', т.е. сделать замену $z = y'$. Уравнение примет вид $\Phi(x, z, z') = 0$.

Случай 2. Уравнение не содержит x. Порядок уравнения понижается с помощью подстановки $y' = P(y)$. В этом случае $y'' = P'(y)P(y)$. Уравнение примет вид $\Phi(y, p, p'p) = 0$.

§13. Линейные однородные уравнения второго порядка

Линейным однородным уравнением второго порядка называется уравнение вида $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$ (1)

где функции $P(x)$ и $Q(x)$ не зависят от y.

Теорема 1. Если функция $\varphi(x)$ является решением уравнения (1), то функция $C\varphi(x)$ (C – постоянная) – также решение.

Теорема 2. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1), то функция $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ – также решение.

Следствие. Если функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1), то функция $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ (C_1 и C_2 – константы) – тоже решение.

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы, если соотношение $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) = 0$ возможно лишь тогда, когда обе постоянные a_1, a_2 равны нулю.

Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно независимы и являются решениями уравнения (1), то функция $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ даёт общее решение.

§14. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $ay'' + by' + cy = 0$, где a, b, c – константы, называется линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Чтобы решить такое уравнение, надо составить характеристическое уравнение $ak^2 + bk + c = 0$ и найти его корни k_1 и k_2.

Возможны три случая.

Случай 1. Характеристическое уравнение имеет два действительных корня k_1 и k_2 (если дискриминант $D = b^2 - 4ac > 0$). Тогда общее решение имеет вид: $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Случай 2. Характеристическое уравнение имеет два равных действительных корня $k = k_1 = k_2$ (если дискриминант $D = b^2 - 4ac = 0$). Тогда общее решение имеет вид: $y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}$, C_1 и C_2 – произвольные константы.

Случай 3. Характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряжённые корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица (если дискриминант $\mathrm{D} = b^2 - 4ac < 0$). Общее решение в этом случае можно записать в виде:
$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Сведём все три случая в табл. 1.

Таблица 1

Корни характеристического уравнения	Вид общего решения
1. $k_1 \neq k_2$ действительные	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2. $k_1 = k_2 = k$	$y = C_1 e^{kx} + x C_2 e^{kx}$
3. $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

§15. Линейные неоднородные уравнения второго порядка

Линейным неоднородным уравнением второго порядка называется уравнение вида

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x), \qquad (1)$$

где функции $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ не зависят от y.

Теорема наложения. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (1) для различных правых частей $R_1(x)$ и $R_2(x)$, то их сумма $y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ будет решением такого же уравнения с правой частью $R(x) = R_1(x) + R_2(x)$.

Следствие. Для получения общего решения неоднородного уравнения следует к какому-либо его частному решению y^* прибавить общее решение $\bar{y}$ соответствующего однородного уравнения, т.е. $y = y^* + \bar{y}$ – общее решение уравнения (1).

§16. Метод вариации постоянных

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x).$$

Пусть $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения. Ищем общее решение уравнения, считая C_1 и C_2 неизвестными функциями от x.

Вводим новое условие $C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x) = 0$, получаем, подставляя y в исходное уравнение:

$C_1'\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2'(x) = R(x)$.

Решая систему линейных уравнений, найдем C_1' и C_2' и далее, интегрируя, C_1 и C_2. Метод вариации постоянных позволяет решать линейные уравнения любого порядка.

§17. Правила нахождения частного решения неоднородного уравнения второй степени

Чтобы найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $ay'' + by' + cy = R(x)$, нужно к его частному решению y^* прибавить общее решение $\overline{y}$ однородного уравнения (см. табл. 1 §14).

Для правых частей $R(x)$, имеющих вид $P_n(x)e^{\alpha x}$, где $P_n(x)$ –многочлен степени n, или $e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$ для нахождения y^* нужно помнить следующие правила:

Правило 1. y^* «похожа» на правую часть $R(x)$.

Правило 2. y^* ищем в общем виде.

Правило 3. Не забыть о связи с корнями характеристического уравнения.

Подробно это описано в табл. 2.

Таблица 2

Связь с корнями характеристического уравнения	Вид $R(x)$	Вид y^*
а) $k_1 \neq \alpha$; $k_2 \neq \alpha$ б) $k_1 = \alpha$; $k_2 \neq \alpha$ в) $k_1 = k_2 = \alpha$	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$y^* = Q_n(x)\ e^{\alpha x}$ $y^* = xQ_n(x)\ e^{\alpha x}$ $y^* = x^2Q_n(x)\ e^{\alpha x}$
а) $k_{1,2} \neq \alpha \pm i\beta$ б) $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x}(M\cos\beta x + N\sin\beta x)$	$y^* = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$ $y^* = xe^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$

Замечания: 1) $Q_n(x)$ многочлен степени n в общем виде, например, $Q_0(x) = A$, $Q_1(x) = Ax + B$, $Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ и т.д.;

2) α может быть равно нулю;

3) если M или N равно нулю, y^* сохраняет свой вид.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти решение уравнения $xy' + \ln x = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y(e) = \dfrac{1}{2}$.

Решение. Выразим из уравнения y':

$$xy' = 1 - \ln x; \ \ y' = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными (см. §3).

Учитывая то, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получаем следующее уравнение: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}$, $\quad dy = \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right)dx.$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения: $\int dy = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right)dx$; $y=\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

Чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, подставим $x_0 = e$ и $y_0=\frac{1}{2}$ в решение и найдем значение константы C:

$\frac{1}{2}=\ln e-\frac{1}{2}\ln^2 e+C$; $\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}=C$. Отсюда $C = 0$.

Следовательно, $y=\ln x-\frac{1}{2}\ln^2 x$ – требуемое частное решение.

Задача 2. Решить уравнение $\frac{y}{x^2}dy-(1-y)dx=0$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (см. §3). Умножим обе части уравнения на выражение $\frac{x^2}{1-y}$:

$$\frac{x^2}{1-y}\cdot\frac{y}{x^2}dy-\frac{x^2}{1-y}\cdot(1-y)dx=0;\quad \frac{y}{1-y}dy=x^2dx.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части:

$\int\frac{y}{1-y}dy=\int x^2dx$; $-y-\ln|1-y|=\frac{x^3}{3}+C$ – общий интеграл.

При умножении на $\frac{1}{1-y}$ могло быть потеряно решение $1 - y = 0$, т.е. $y = 1$.

Подставляя $y = 1$ и $dy = 0$ в исходное уравнение, получаем тождество. Следовательно, $y = 1$ – решение уравнения.

Ответ: $-y-\ln|1-y|=\dfrac{x^3}{3}+C$, $y = 1$.

Задача 3. Решить уравнение $x^2 y' = y(x+y)$.

Решение. Выразим из уравнения y': $y'=\dfrac{y}{x^2}(x+y)$,

$y'=\dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x+y}{x}\right)$, $y'=\dfrac{y}{x}(1+\dfrac{y}{x})$. Получили однородное уравнение (см. §4). Делаем замену $t=\dfrac{y}{x}$, $y=tx$, $y'=t'x+t$:

$t'x+t=t(1+t)$, $t'x=t^2$, $x\,dt=t^2dx$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его: $\dfrac{dt}{t^2}=\dfrac{dx}{x}$, $\displaystyle\int\frac{dt}{t^2}=\int\frac{dx}{x}$,

$-\dfrac{1}{t}=\ln|x|+C$. Возвращаясь к старой переменной y, получаем: $-\dfrac{x}{y}=\ln|x|+C$.

Задача 4. Решить уравнение $(x^2-2xy)\,dy+y^2dx=0$.

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{y^2}{x^2-2xy}=\frac{y^2}{x^2\left(1-\frac{2xy}{x^2}\right)}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}.$$ Так как оно представимо в виде функции аргумента $\frac{y}{x}$, то данное уравнение является однородным (см. §4). Вводим новую переменную $t=\frac{y}{x}$, $y=tx$, $dy=tdx+xdt$: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2-2xy}$,

$\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2}{x^2-2xy}$, $\frac{tdx+xdt}{dx}=-\frac{t^2}{1-2t}$, $x\,dt=\left(-\frac{t^2}{1-2t}-t\right)dx$ – уравнение с разделяющимися переменными. $\int\frac{1-2t}{t(t-1)}dt=\int\frac{dx}{x}$,

$-\ln|t|-\ln|t-1|=\ln|x|+C$. Пользуясь свойствами логарифма, это выражение можно преобразовать: $\ln|t(t-1)|=-\ln C_1|x|$. (Мы ввели новую константу C_1, связанную со старой следующим образом: $C=\ln C_1$). Потенцируя обе части полученного выражения (потенцирование – действие, обратное логарифмированию), получаем интеграл уравнения $t(t-1)=\frac{1}{C_1x}$. Возвращаемся к переменной y: $\frac{y}{x}(\frac{y}{x}-1)=\frac{1}{C_1x}$, $y(y-x)=C_2x$, где $C_2=\frac{1}{C_1}$.

Ответ: $y(y-x)=C_2x$.

Задача 5. Решить уравнение $y' = 2\left(\dfrac{y+1}{x+y-2}\right)^2$.

Решение. Находим точку пересечения прямых $\begin{cases} y+1=0, \\ x+y-2=0. \end{cases}$ Получаем точку (3, –1). Введём замену $x-3=t$, $y+1=z$, получим однородное уравнение $\dfrac{dz}{dt} = 2\dfrac{z^2}{(t+z)^2}$. Пусть $zz = tu$, $dz = tdu + udt$, тогда $\dfrac{tdu+udt}{dt} = 2\dfrac{t^2u^2}{(t+tu)^2}$, $tdu = \left(2\dfrac{u^2}{(1+u)^2} - u\right)dt$, $tdu = -\dfrac{u(1+u^2)}{(1+u)^2}dt$, $\dfrac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du = -\dfrac{dt}{t}$. Интегрируем: $\displaystyle\int \frac{(1+u)^2}{u(1+u^2)}du = \int \frac{du}{u} + \int \frac{2du}{1+u^2} = \ln|u| + 2\operatorname{arctg} u + C$.

$-\displaystyle\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C$. Итак, $\ln|u| + 2\operatorname{arctg} u = -\ln|t| + C$, $ut = C_1 e^{-2\operatorname{arctg} u}$, где $C = \ln C_1$. Возвращаясь к старым переменным, получаем решение исходного уравнения: $y+1 = C_1 e^{-2\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x-3}}$.

Задача 6. Решить уравнение $(x+y+2)dx + (2x+2y-1)dy = 0$.

Решение. Поскольку прямые $x+y+2=0$ и $2x+2y-1=0$ параллельны, то подстановкой $t = x+y$, $dy = dt - dx$ переменные разделяются:

$(t+2)dx+(2t-1)(dt-dx)=0$, $(3-t)dx+(2t-1)dt=0$. Разделяем переменные: $dx=\frac{1-2t}{3-t}dt$. Интегрируем: $\int dx=\int\frac{1-2t}{3-t}dt$, $x=2t+5\ln|3-t|+C$. Возвращаемся к старым переменным ($t=x+y$), получаем окончательный ответ: $x+2y+5\ln|3-x-y|+C=0$.

Задача 7. Решить уравнение $xy'+y=\cos x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x:

$y'+\frac{y}{x}=\frac{\cos x}{x}$. Получили линейное уравнение (см. §6).

Решаем уравнение: $y'+\frac{y}{x}=0$.

Разделяем переменные: $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$; $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$.

Интегрируем обе части: $\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$; $\ln|y|=-\ln|x|+C$.

Пользуясь свойствами логарифма, получаем $y=\frac{C_1}{x}$. (Мы ввели новую константу C_1, связанную со старой следующим образом: $C=\ln C_1$). Считая C_1 функцией от x, подставляем в полученное линейное уравнение $y=\frac{C_1}{x}$ и $y'=\frac{C_1'x-C_1}{x^2}$:

$$\frac{C_1'x-C_1}{x^2}+\frac{C_1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\cos x}{x},\quad \frac{C_1'}{x}-\frac{C_1}{x^2}+\frac{C_1}{x^2}=\frac{\cos x}{x}.$$

Отсюда находим $C'_1 = \cos x$, $C_1 = \sin x + B$, где B – константа.

Ответ: $y = \dfrac{\sin x + B}{x}$ – решение уравнения.

Задача 8. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x^3y^3$.

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли (см. §7). Разделим обе части уравнения на y^3:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2xy}{y^3} = \frac{2x^3y^3}{y^3},$$

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2x}{y^2} = 2x^3. \qquad (1)$$

Делаем замену $z = \dfrac{1}{y^2}$, $z' = -\dfrac{2}{y^3}y'$.

Отсюда находим $y' = -\dfrac{1}{2}z'y^3$.

Подставляем в уравнение (1): $-\dfrac{1}{2}\dfrac{z'y^3}{y^3} + 2xz = 2x^3$,

$$-\frac{1}{2}z' + 2xz = 2x^3 \qquad (2)$$

линейное уравнение (см. §6).

Решаем уравнение $-\dfrac{1}{2}z' + 2xz = 0$.

Разделяем переменные $-\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx} = -2xz$; $\dfrac{dz}{z} = 4xdx$.

Интегрируем обе части уравнения: $\int \frac{dz}{z} = \int 4x dx$; $\ln|z| = 2x^2 + C$.

Потенцируем обе части полученного выражения: $z = C_1 e^{2x^2}$, где $C_1 = e^C$.

Считая C_1 функцией от x, подставляем в линейное уравнение (2) $z = C_1 e^{2x^2}$ и $z' = C_1' e^{2x^2} + 4xC_1 e^{2x^2}$:

$$-\frac{1}{2} C_1' e^{2x^2} - 2xC_1 e^{2x^2} + 2xC_1 e^{2x^2} = 2x^3.$$

Выражаем C'_1: $C_1' = -4x^3 e^{-2x^2}$.

Интегрируя, находим $C_1 = x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} e^{-2x^2} + A$, где A – константа.

Решение уравнения (2):

$$z = (x^2 e^{-2x^2} + \frac{1}{2} e^{-2x^2} + A) e^{2x^2}, \quad z = x^2 + \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}.$$

Возвращаемся к переменной y:

$\frac{1}{y^2} = x^2 + \frac{1}{2} + Ae^{2x^2}$ – общий интеграл уравнения.

Задача 9. Решить уравнение $x\frac{dy}{dx} + y = y^2 \ln x$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Его можно решать с помощью замены $z = \frac{1}{y}$, которая приведёт исходное уравнение к линейному. Но в данном случае уравнение проще решить методом Бернулли. Будем искать решения уравнения в виде произведения двух функций: $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тогда $xu'v + xuv' + uv = u^2v^2 \ln x$, $xu'v + u(xv' + v) = u^2v^2 \ln x$. Функцию *v(x)* найдём как частное решение уравнения $xv' + v = 0$, $\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$, $v = \frac{1}{x}$.

Тогда $xu'\frac{1}{x} = u^2\frac{1}{x^2}\ln x$, $u' = \frac{u^2}{x^2}\ln x$, разделяем переменные: $\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}dx$.

Интегрируем: $\int\frac{du}{u^2} = \int\frac{\ln x}{x^2}dx$, $-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - C$,

$u = \frac{x}{\ln x + Cx + 1}$. Таким образом, $y = uv = \frac{x}{\ln x + Cx + 1}\cdot\frac{1}{x}$

Ответ: $y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}$.

Задача 10. Решить задачу Коши $y'' + 2y' = e^x(y')^2$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Уравнение не содержит искомой функции, поэтому с помощью подстановки $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ можно понизить порядок уравнения (см. §12): $p' + 2p = e^x p^2$ – уравнение Бернулли, его решения будем искать в виде $p = uv$: $u'v + uv' + 2uv = e^x u^2 v^2$.

Решаем два уравнения:

I. $v' + 2v = 0$, $\frac{dv}{v} = -2dx$, $\ln v = -2x$, $v = e^{-2x}$;

II. $u'e^{-2x} = e^x u^2 e^{-4x}$, $u' = u^2 e^{-x}$, $\frac{du}{u^2} = e^{-x}dx$, $-\frac{1}{u} = -e^{-x} - C$,

$u = \frac{1}{C + e^{-x}}$.

Итак, $p = uv = \frac{1}{C + e^{-x}} e^{-2x} = \frac{1}{Ce^{2x} + e^x}$.

Используя начальные условия, найдём константу C. Поскольку $p = y'$, то $p(0) = y'(0) = 1$. Подставим в полученное решение: $1 = \frac{1}{Ce^{2\cdot 0} + e^0} = \frac{1}{C+1}$. Следовательно, $C = 0$. Итак, $y' = p = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$. Решаем полученное уравнение: $dy = e^{-x}dx$, $y = -e^{-x} + A$. Подставляем начальные условия: $-1 = -e^{-0} + A$,
-1 = -1 + A. Следовательно, A = 0. Итак, частное решение исходного уравнения $y = -e^{-x}$.

Задача 11.Решить задачу Коши $yy'' - (y')^2 = y^2 \ln y$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Решение. Уравнение не содержит в явном виде независимую переменную x (см. §12). С помощью подстановки $y' = p(y)$, $y'' = p'p$ понизим порядок уравнения:

$yp'p - p^2 = y^2 \ln y$, $yp' - p = \frac{1}{p} y^2 \ln y$ – уравнение Бернулли. Ищем решение этого уравнения в виде $p = uv$:

$yu'v + yuv' - uv = \frac{y^2 \ln y}{uv}$, $yu'v + u(yv' - v) = \frac{y^2 \ln y}{uv}$.

Решаем два уравнения:

I. $yv' - v = 0$, $\dfrac{dv}{v} = \dfrac{dy}{y}$, $\ln|v| = \ln|y|$, $v = y$;

II. $yu'y = \dfrac{y^2 \ln y}{uy}$, $y^2 u' = \dfrac{y \ln y}{u}$, $udu = \dfrac{\ln y}{y} dy$,

$\dfrac{u^2}{2} = \dfrac{\ln^2 y}{2} + \dfrac{C}{2}$, $u = \sqrt{\ln^2 y + C}$.

Итак, $p = uv = y\sqrt{\ln^2 y + C}$.

Найдём константу C, подставляя начальные условия: $p(1) = y'(0) = 1$, $y(0) = 1$: $1 = 1\sqrt{\ln^2 1 + C}$, $C = 1$.

Итак, $y' = y\sqrt{\ln^2 y + 1}$, $\dfrac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 1}} = dx$,

$$x + \ln A = \int \frac{dy}{y\sqrt{\ln^2 y + 1}} = \int \frac{d \ln y}{\sqrt{\ln^2 y + 1}} = \ln|\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1}|,$$

$\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1} = Ae^x$.

Подставляем начальные условия $y(0) = 1$, находим константу A: $\ln 1 + \sqrt{\ln^2 1 + 1} = Ae^0$, $A = 1$.

Итак, $\ln y + \sqrt{\ln^2 y + 1} = e^x$, или

$1 + \ln^2 y = e^{2x} - 2e^x \ln y + \ln^2 y$, или $2e^x \ln y = e^{2x} - 1$, или

$\ln y = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$, $y = e^{\frac{e^{2x}-1}{2e^x}}$.

Ответ: $y = e^{\frac{e^{2x}-1}{2e^x}}$.

Задача 12. Найти общее решение уравнения
$y''-2y' + y = 0$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным уравнением второго порядка (см. §13).

Составляем характеристическое уравнение:
$k^2 - 2k + 1 = 0$. Решаем его: $D = 4 - 4 = 0$, $k = 2/2 = 1$, так как $D = 0$, то общее решение имеет вид: $\overline{y} = C_1e^x + C_2xe^x$ (см. табл. 1, случай 2).

Задача 13. Найти общее решение уравнения
$y'' - y' - 2y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение:
$k^2 - k - 2 = 0$. Решаем его: $D = 1 - 4\cdot1\cdot(-2) = 9$,

$k_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$, $k_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Так как $D > 0$, то общее решение имеет вид: $\overline{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$ (см. табл. 1, случай 1).

Задача 14. Найти общее решение уравнения
$5y'' - 6y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение
$5k^2 - 6k + 5 = 0$.

Решаем его: $D = 36 - 100 = -64$. Так как $D < 0$, то решением будет пара комплексно-сопряжённых корней (см.§14, случай 3):

$k_1 = \dfrac{6+\sqrt{-64}}{10}$, $k_2 = \dfrac{6-\sqrt{-64}}{10}$,

$(\sqrt{-64} = \sqrt{64\cdot(-1)} = 8\sqrt{-1} = 8i)$, т.е. корни характеристического уравнения $k_{1,2} = \frac{3}{5} \pm \frac{4}{5} i$. В нашем случае

$\alpha = \frac{3}{5}, \quad \beta = \frac{4}{5}$.

Тогда общее решение однородного уравнения

$\overline{y} = e^{\frac{3}{5}x}(C_1 \cos\frac{4}{5}x + C_2 \sin\frac{4}{5}x)$ (см. табл. 1, случай 3).

Задача 15. Найти частное решение уравнения $y'' - y' = 2\,(1 - x)$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Решение. Найдём общее решение данного неоднородного уравнения $y = y^* + \overline{y}$.

Сначала найдем общее решение однородного уравнения $\overline{y}$. Составляем и решаем характеристическое уравнение:

$k^2 - k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = 1$. Из табл. 1

$$\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_1 x} = C_1 + C_2 e^x \quad (\text{т.к. } e^{0x} = e^0 = 1).$$

Подберем частное решение неоднородного уравнения y^*. Правую часть уравнения можно записать в виде $R(x) = e^{0x} 2(1 - x) = e^{\alpha x} P(x)$ (см. §17). В нашем случае $\alpha = 0$ и $P(x) = 2 - 2x$ – многочлен первой степени.

Так как $\alpha = 0$ является корнем характеристического уравнения, то из табл. 2, случай 1б:

$$y^* = x(Ax + B)e^{0x} = Ax^2 + Bx$$

Найдём $(y^*)'$, $(y^*)''$ и подставим в исходное уравнение

$$(y^*)' = 2Ax + B$$

$(y*)'' = 2A$

$2A - 2Ax - B = 2 - 2x$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{l} x^0: \\ x\ \ : \end{array}\begin{cases} 2A - B = 2, \\ -2A = -2. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1$, $B = 0$. Следовательно, $y^* = x^2$ и $y = C_1 + C_2e^x + x^2$. Используя начальные условия, находим C_1 и C_2: $y(0) = C_1 + C_2e^0 + 0^2 = C_1 + C_2 = 1$,

$y'(0) = C_2e^0 + 2\cdot 0 = C_2 = 1$.

Отсюда $C_2 = 1$ и $C_1 = 0$.

Ответ: $y = e^x + x^2$ – искомое частное решение.

Задача 16. Найти частное решение уравнения $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$ при начальных условиях $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, поэтому общее решение однородного уравнения $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Правую часть уравнения можно записать в виде $R(x) = e^{0x}(\cos x - 3\sin x)$. Отсюда $\alpha = 0$, $\beta = 1$, частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y* = A\cos x + B\sin x$ (см. табл.2, случай 2а). Итак

$$\left.\begin{array}{l|l} y* = A\cos x + B\sin x & \times(-2) \\ (y*)' = -A\sin x + B\cos x & \times 1 \\ (y*)'' = -A\cos x - B\sin x & \times 1 \end{array}\right| +$$

Получаем систему

$$\begin{array}{l}\cos x:\\ \sin x:\end{array}\begin{cases}-2A+B-A=1\\ -2B-A-B=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\ B=1\end{cases}$$

Следовательно, частное решение неоднородного уравнения $y*=\sin x$ и общее решение данного уравнения $y=\overline{y}+y*=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\sin x$, $y'=C_1e^x-2C_2e^{-2x}+\cos x$.

Найдём C_1 и C_2, используя начальные условия:

$$\begin{cases}1=C_1e^0+C_2e^{-2\cdot 0}+\sin 0\\ 2=C_1e^0-2C_2e^{-2\cdot 0}+\cos 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=C_1+C_2\\ 2=C_1-2C_2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=0\\ C_1=1\end{cases}$$

Итак, $y=e^x+\sin x$ – частное решение исходного уравнения.

Задача 17. Найти общее решение дифференциального уравнения методом вариации произвольных постоянных

$$y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}.$$

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения $\overline{y}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Частное решение исходного уравнения методом неопределённых коэффициентов искать нельзя (функция $f(x)$ имеет другой вид), поэтому используем метод вариации произвольных постоянных (см. §16). Будем искать решение уравнения в виде $y=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$, где функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ нужно найти из системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ C_1'(x)(\cos 2x)' + C_2'(x)(\sin 2x)' = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x + 2C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{\cos 2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{\sin 2x}{2\cos 2x} \\ C_2'(x) = 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{2}\int \operatorname{tg} 2x dx = \dfrac{1}{4}\ln|\cos 2x| + A \\ C_2(x) = x/2 + B \end{cases}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x| + A\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + B\sin 2x.$$

Задача 18. Если температура воздуха равна 10°С и тело в течение 30 мин охлаждается с 80°С до 30°С, то через сколько минут его температура понизится до 20°С? (По закону Ньютона скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды).

Решение. Введём обозначения: T – температура, t – время, k – коэффициент пропорциональности, тогда $\dfrac{dT}{dt}$ – скорость охлаждения. В силу закона Ньютона:

$\frac{dT}{dt} = k(T-10)$ – дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решаем его: $\frac{dT}{(T-10)} = kdt$, $\ln|T-10| = kt + \ln C$. Если t = 0, то T = 80°С. Из этих условий найдём C: $\ln 70 = \ln C$, C = 70.

Если t = 30, то T = 30°С. Найдём k: $\ln 20 = k\cdot 30 + \ln 70$,

$k = -\frac{1}{30}\ln 3{,}5$. Итак, закон охлаждения тела имеет вид

$T - 10 = 70e^{-\frac{1}{30}t\ln 3{,}5}$ или $T = 10 + 70\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{t/30}$. При T = 20°

имеем $10 = 70\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{t/30}$, $\frac{1}{7} = \left(\frac{2}{7}\right)^{t/30}$, $t/30 = \ln_{2/7}\left(1/7\right)$,

$t = 30\frac{\ln 7}{\ln 3{,}5} \approx 47$ мин.

Ответ. Примерно 47 минут.

Глава 9. РЯДЫ

§1. Числовые ряды. Основные понятия

Выражение вида $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, где числа $a_1, a_2, ...,$ $a_n, ...$ образуют бесконечную последовательность, называется числовым рядом; суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называются частичными суммами ряда, а член a_n – общим членом ряда.

Если последовательность частичных сумм $S_1, S_2, ..., S_n$ имеет конечный предел (при $n \to \infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд называется сходящимся, а число S – суммой ряда. Обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Если конечного предела не существует, то ряд называется расходящимся**.** В этом случае величина S_n может неограниченно возрастать ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$) или быть колеблющейся.

Остатком или остаточным членом сходящегося ряда $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ называется разность между его суммой S и частичной суммой S_n; он обозначается через R_n:
$R_n = S - S_n = = a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m} + ...$

§2. Основные свойства числовых рядов

Теорема 1. Отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на сходимости или расходимости ряда.

Теорема 2. Если члены сходящегося ряда умножить на один и тот же множитель C, то его сходимость не нарушится, а сумма умножится на C.

Теорема 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать: из сходимости рядов

$a_1 + a_2 +...+ a_n +...$ с суммой S_1

и $b_1 + b_2 +...+ b_n +...$ с суммой S_2

следует, что ряд $(a_1 \pm b_1)+(a_2 \pm b_2)+...+(a_n \pm b_n)+...$ сходится и его сумма равна $S_1 \pm S_2$.

§3. Необходимое условие сходимости ряда

Для сходимости числового ряда необходимо, чтобы общий член ряда при $n \to \infty$ стремился к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Этот признак не является достаточным. Например, в гармоническом ряде $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, но $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. условие выполнено, но ряд расходится.

§4. Признаки сходимости знакоположительных рядов

Знакоположительным рядом называется ряд, все члены которого положительны.

Признак сравнения. Если два знакоположительных ряда

(A): $a_1 + a_2 +...+ a_n +...$ и

(B): $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$,

начиная с некоторого n, $a_n \geq b_n$, то из сходимости ряда (А) следует сходимость ряда (В), а из расходимости ряда (В) следует расходимость ряда (А).

Признак Даламбера. Если для ряда

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = p$, то ряд сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$. При $p = 1$ признак ответа не дает: ряд может сходиться или расходиться.

Признак Коши. Если для ряда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$, то ряд сходится при $p < 1$ и расходится при $p > 1$. При $p = 1$ признак ответа не дает.

Интегральный признак Коши. Ряд с общим членом $a_n = f(n)$ сходится, если $f(x)$ – функция монотонно убывающая и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится; ряд с общим членом $f(n)$ расходится, если этот интеграл расходится.

§5. Знакопеременные ряды

Одновременно с рядом (А) $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, члены которого имеют неодинаковые знаки (такой ряд называется знакопеременным), удобно рассматривать ряд (В) $|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин (модулей) членов ряда (А). Если ряд (В) сходится, то и ряд (А) сходится, в этом случае ряд (А) называется абсолютно сходящимся. Если ряд (В) расходится, то ряд (А) может как расходиться, так и сходиться. В случае, если при расходимости ряда (В) ряд (А) сходится, ряд (А) называется условно сходящимся.

§6. Знакочередующиеся ряды

Ряд $a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n+1}a_n + ...$, где a_i – положительные числа, называется знакочередующимся.

Признак Лейбница. Для сходимости знакочередующегося ряда достаточно выполнения двух условий:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

2) $a_1 > a_2 > ... > a_n > ...$.

Остаток знакочередующегося ряда $R_n = S - S_n$ имеет знак первого отброшенного члена и будет меньше его по абсолютной величине: $|R_n| < |a_n|$.

§7. Функциональные ряды. Основные понятия

Ряд, составленный из функций одной и той же переменной x: $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, называется функциональным.

Все те значения $x = a$, которые входят в область задания всех функций $f_n(x)$ и для которых числовые ряды $f_1(a) + f_2(a) + ... + f_n(a) + ...$ сходятся (т.е. для которых существует конечный предел частичных сумм $S_n(a)$:

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n(a) = S(a)$), образуют область сходимости функционального ряда. Функция $S(x)$ называется суммой ряда .

§8. Равномерная сходимость ряда

Функциональный ряд называется равномерно сходящимся в данной области, если существует число N, общее для всех значений x, входящих в область сходимости, такое, что

$|S(x)–S_n(x)| < \varepsilon$, при $n > N$, для любого сколь угодно малого положительного ε. Иначе говоря, ряд называется равномерно сходящимся, если остаток ряда $R_n(x)$, начиная с некоторого N, общего для всех значений x, остается по абсолютному значению меньшим любого заранее данного положительного числа ε:

$|R_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N$.

Функциональный ряд сходится в данной области неравномерно, если каково бы ни было n, найдется в области сходимости такое число x, что $|S(x) – S_n(x)| > \varepsilon$.

§9. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости рядов

Ряд $f_1(x) + f_2(x) +...+ f_n(x)+...$ равномерно сходится в данной области, если существует такой сходящийся числовой ряд $c_1 + c_2 +...+ c_n +...$, что для всех значений x, лежащих в этой области, выполняется неравенство $|f_n(x)| \le c_n$.

В этом случае ряд $c_1 + c_2 +...+ c_n +...$ называется мажорантой ряда $f_1(x) + f_2(x) +...+ f_n(x)+...$

§10. Свойства равномерно сходящихся рядов

Теорема 1. Если $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$,... – непрерывные функции в некоторой области их задания и ряд $f_1(x) + f_2(x) +...+ f_n(x) +...$ равномерно сходится в этой области, то его сумма $S(x)$ – функция также непрерывная в этой области.

Теорема 2. Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать в данной области, и сумма интегралов от членов ряда равна интегралу от суммы данного ряда: $\int\limits_a^x f_1(x)dx + \int\limits_a^x f_2(x)dx + ... + \int\limits_a^x f_n(x)dx + ... = \int\limits_a^x S(x)dx$.

Теорема 3. Если функциональный ряд $f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) +...$ сходится в некоторой области и производные его членов непрерывны в этой области, то ряд можно почленно дифференцировать при условии, что полученный ряд $f_1'(x) + f_2'(x) +...+ + f_n'(x)+...$ будет равномерно сходящимся в данном промежутке. Сумма производных от членов ряда будет равна производной от суммы ряда.

§11. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида (A) $a_0 + a_1x + a_2x^2 +...+ a_nx^n +...$ или

(B) $a_0 + a_1(x – a) + a_2(x – a)^2 +...+ a_n(x – a)^n +...$, где a и a_i – постоянные коэффициенты.

§12. Свойства степенных рядов

Ряд (А) абсолютно сходится для всех значений x, меньших по абсолютной величине некоторого числа ρ ($|x| < \rho$), называемого радиусом сходимости степенного ряда.

Ряд (В) абсолютно сходится для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \rho$ (ρ – радиус сходимости). Радиус сходимости может быть определен по формулам $\frac{1}{\rho} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$; $\frac{1}{\rho} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

На границах области сходимости (для ряда (А) при $x = \rho$ и $x = -\rho$ для ряда (В) при $x = a + \rho$ и $x = a - \rho$) ряд может сходиться или расходиться.

Теорема Абеля. Если ряд (А) сходится для положительного значения $x = x_1$, то он сходится равномерно внутри интервала $(-x_1, x_1)$.

§13. Ряд Тейлора

Всякая непрерывная функция $y = f(x)$ раскладывается по формуле Тейлора в точке x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Теорема. Функция $y = f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в точке x_0 тогда и только тогда, когда она определена в этой точке, непрерывна в некоторой её окрестности и остаточный член в формуле Тейлора

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ стремится к нулю при $n \to \infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0\right)$.

Разложить функцию $f(x)$ в степенной ряд по степеням $(x - x_0)$ – значит составить ряд вида $a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_n(x - a)^n + \ldots$, у которого радиус сходимости не равен нулю, а сумма тождественно равна данной функции всюду внутри области сходимости.

Теорема. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд, то разложение единственно, и степенной ряд совпадает с рядом Тейлора.

Ряд Маклорена – разложение функции $f(x)$ по степеням x – частный случай ряда Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

§14. Разложение в степенной ряд элементарных функций

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 \pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\ldots + (\pm 1)^n \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

область сходимости $|x| < 1$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

область сходимости $|x| < \infty$.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

область сходимости $|x| < \infty$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

область сходимости $|x| < \infty$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots,$$

область сходимости $-1 < x \le 1$.

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\ ,$$

область сходимости $|x| < 1$.

§15. Приложение степенных рядов к приближенным вычислениям

Вычисление определенных интегралов.

Если подынтегральная функция $f(x)$ может быть представлена в интервале интегрирования $[a,b]$ равномерно сходящимся рядом

$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$,

то определенный интеграл может быть представлен в виде сходящегося числового ряда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi_1(x)dx + \int_a^b \varphi_2(x)dx + ... + \int_a^b \varphi_n(x)dx + ...$$

В случае легко интегрируемых функций $\varphi_i(x)$ (например, при разложении $f(x)$ в степенной ряд, равномерно сходящийся в интервале $[a, b]$) интеграл $\int_a^b f(x)dx$ может быть вычислен с любой степенью точности.

Интегрирование дифференциальных уравнений.

Решение уравнения $y' = f(x, y)$ при начальных условиях $x = x_0$, $y = y_0$ можно искать в виде ряда, расположенного по степеням $(x - x_0)$, т.е. в виде

$$y = y_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2 + ... + C_n(x-x_0)^n + ...$$

Множители C_1, C_2,..., C_n,... находят по методу неопределённых коэффициентов.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти сумму ряда

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{45} + \frac{1}{135} + \frac{1}{405} + ...$$

Решение. Ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии и поэтому сходится. Здесь $a = \frac{3}{5}$, $q = \frac{1}{3}$. Следовательно, $S = \frac{a}{1-q} = \frac{3/5}{1-1/3} = 0,9$.

Задача 2. Найти сумму ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^2 + n - 2}$.

Решение. Представим общий член ряда

$a_n = \dfrac{3}{n^2+n-2} = \dfrac{3}{(n-1)(n+2)}$ в виде суммы простейших дробей: $\dfrac{3}{(n-1)(n+2)} = \dfrac{A}{n-1} + \dfrac{B}{n+2}$. Умножив на знаменатель левой части, получим тождество $3 \equiv A(n+2) + B(n-1)$.

$$\begin{matrix} \text{при } n=-2 \\ \text{при } n=1 \end{matrix} \begin{cases} 3=-3B \\ 3=3A, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

Итак, общий член ряда $a_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+2}$. Отсюда

$$a_2 = 1-\frac{1}{4},\ a_3 = \frac{1}{2}-\frac{1}{5},\ a_4 = \frac{1}{3}-\frac{1}{6},\ a_5 = \frac{1}{4}-\frac{1}{7},\ a_6 = \frac{1}{5}-\frac{1}{8}, \ldots$$

$$a_{n-2} = \frac{1}{n-3}-\frac{1}{n},\ a_{n-1} = \frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1},\ a_n = \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2},$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+3},$$

$$S_{n+1} = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\ \ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right) =$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}.$$

Следовательно, ряд сходится и имеет сумму $11/6$.

Задача 3. Доказать сходимость числового ряда

$$\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$$

Решение. Используем признак Даламбера (см. §4):

$$p=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}:\frac{n^2}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{3}<1.$$

Так как полученное значение предела $p=\frac{1}{3}<1$, то данный ряд сходится.

Задача 4. Доказать сходимость ряда

$$\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$$

Решение. Так как общий член ряда $a_n=\arcsin^n\frac{1}{n}$ представляет собой n-ю степень, то удобно использовать признак Коши (см. §4):

$$p=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\arcsin^n\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n}=\arcsin 0=0<1.$$

Так как $p=0<1$, то ряд сходится.

Задача 5. Исследовать сходимость числового ряда

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$$

Решение. В данном случае признак Даламбера и признак Коши не дают ответа о сходимости ряда, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n\sqrt{n}}}=1.$$

Используем интегральный признак Коши (см. §4): ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится или расходится одновременно с интегралом $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x}}=\int_1^{\infty}x^{-3/2}dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^b=0+2=2$.

Так как интеграл сходится, то и ряд сходится.

Задача 6. Написать первые четыре члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$, найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на концах интервала.

Решение. Подставляя в общий член ряда последовательно n = 1,2,3,4,..., запишем данный ряд в виде $x+\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{300}+\frac{x^4}{4000}+\ldots$

Найдем радиус сходимости степенного ряда по формуле (см. §12):

$$\frac{1}{\rho}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot 10^{n-1}}{(n+1)\cdot 10^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{10}.$$

Следовательно, $\rho = 10$ и интервал сходимости – $10 < x < 10$.

Исследуем сходимость ряда на концах полученного интервала. При $x = -10$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 10}{n}$ – знакочередующийся (см. §6). Для исследования его сходимости используем признак Лейбница:

1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n} = 0;$

2) $10 > \frac{10}{2} > \ldots > \frac{10}{n} > \frac{10}{n+1} > \ldots$

Оба условия выполнены. Следовательно, данный ряд сходится. Значит, $x = -10$ принадлежит интервалу сходимости.

При $x = 10$ ряд принимает вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}$. Исследуем сходимость этого ряда с помощью признака сравнения (см. §4): т.к. $\frac{10}{n} > \frac{1}{n}$ и известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{n}$ тоже расходится. Значит, $x = 10$ не принадлежит интервалу сходимости.

Таким образом, $-10 \le x < 10$ – область сходимости данного ряда.

Задача 7. Вычислить $\sqrt[3]{1,06}$ с точностью до 0,0001.

Решение. Воспользуемся разложением $(1 + x)^m$ в ряд, полагая $x = 0{,}06$, $m = \frac{1}{3}$. Имеем $\sqrt[3]{1{,}06} = (1 + 0{,}06)^{\frac{1}{3}} =$

$$= 1 + \frac{1}{3}0{,}06 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{2!}0{,}06^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)}{3!}0{,}06^3 \ldots =$$

$= 1 + 0{,}02 - 0{,}0018 + 0{,}000133 + \ldots$

Четвёртый и последующие члены отбрасываем, т.к. четвёртый член меньше 0,0001. Итак, $\sqrt[3]{1{,}06} \approx 1{,}0182$.

Задача 8. Вычислить $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в степенной ряд. Для этого заменим x на $(-x^2)$ в разложении функции e^x: $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots$

Тогда

$$\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{0,5}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots\right)dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \ldots\right]_0^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^7 \cdot 7 \cdot 3!} + \frac{1}{2^9 \cdot 9 \cdot 4!} - \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5276} + \frac{1}{110592} - \ldots$$

По признаку Лейбница (см. §6) полученный знакочередующийся ряд сходится, и для достижения нужной точности можно ограничиться первыми четырьмя членами разложения: $\int\limits_0^{0,5} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{1}{320}-\frac{1}{5276}=0,4613$.

Задача 9. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

Решение. Заменим $\cos x$ и e^x их разложениями в степенные ряды, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots\right)}{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-1-x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\ldots}{\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}+\ldots}{\frac{1}{2!}+\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{4!}+\ldots}=1.$$

Задача 10. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots\right)}{x^3}=$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}-\frac{x^2}{5}+\frac{x^4}{7}-\ldots\right)=\frac{1}{3}.$$

Задача 11. Найти четыре первых (отличных от нуля) члена разложения решения уравнения $y'=x^2y+y^3$, $y(0)=1$.

Решение. Дифференцируя уравнение $y' = x^2 y + y^3$, получим $y'' = 2xy + x^2 y' + 3y^2 y'$,

$y''' = 2y + 2xy' + 2xy' + x^2 y'' + 6y(y')^2 + 3y^2 y''$.

При $x = 0$ получаем:

$y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 3$, $y'''(0) = 17$.

Решение имеет вид

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots,$$

$$y = 1 + x + \frac{3}{2!}x^2 + \frac{17}{3!}x^3 + \ldots$$

Ответ: $y = 1 + x + 1{,}5x^2 + \dfrac{17}{6}x^3 + \ldots$

Глава 10. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Задача об объёме цилиндрического тела

Тело, ограниченное снизу плоскостью *xOy*, сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и с боков цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси *Oz*, называется цилиндрическим телом или цилиндроидом.

Задача. Вычислить объём *V* цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу областью *D*, сбоку – цилиндрической поверхностью, для которой направляющей служит контур замкнутой области *D*.

Решение. Разобьём основание *D* на *n* произвольных частей (площадок) Δs_1, Δs_2, Δs_3, ... Δs_n, где Δs_i выражает площадь соответствующей площадки (рис.7). Если для каждой площадки выделить цилиндрическую поверхность, образующая которой параллельна оси *Oz*, а направляющей служит контур этой площадки, то в результате данное тело разобьётся на *n* частей (цилиндрических столбиков). В каждой из площадок Δs_i выберем произвольно (внутри или на границе) некоторую точку P_i; тогда произведение $f(P_i) \cdot \Delta s_i$ будет приближённо выражать объём *i*-го столбика, а сумма таких объёмов

$$f(P_1) \cdot \Delta s_1 + f(P_2) \cdot \Delta s_2 + \ldots + f(P_n) \cdot \Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i \qquad (1)$$

приближённо равна искомому объёму *V*,

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i \ .$$

Назовём наибольшее расстояние между точками, принадлежащими площадке Δs_i, диаметром и обозначим его через d_i. За величину объёма V данного цилиндрического тела принимаем тот предел, к которому стремится сумма (1) при $n \to \infty$ и одновременном стремлении к нулю наибольшего диаметра площадок ($\max d_i$).

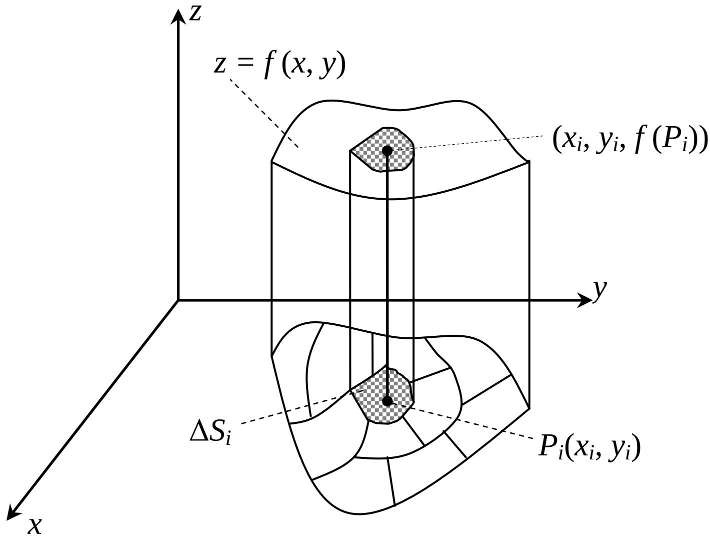


Рис. 7

Таким образом, $V = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta s_i$ или

$$V = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i \qquad (2)$$

Разнообразные задачи приводят к необходимости отыскания пределов вида (2). Эти задачи приводят к понятию двойного интеграла.

§2. Двойной интеграл и его свойства

Пусть $f(x, y)$ непрерывная функция двух переменных в некоторой замкнутой области D. Разобьём область D на n частей $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3, \ldots \Delta s_n$ и в каждой замкнутой области Δs_i выберем произвольную точку $P_i(x_i, y_i)$. Умножим значение функции $f(x, y)$ в точке P_i на площадь области Δs_i и составим следующую сумму:

$$f(P_1)\cdot\Delta s_1 + f(P_2)\cdot\Delta s_2 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta s_i \qquad (3)$$

Сумма (3) называется n-й интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области D. Для функции $f(x, y)$ в области D можно составить бесчисленное множество интегральных сумм вида (3), так как последняя зависит от способа разбиения на элементарные области Δs_i и от выбора соответствующих точек P_i в пределах каждой такой элементарной области Δs_i.

Двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D называется предел интегральной суммы (3) при условии, что $n \to \infty$, а $\max d_i \to 0$.

$$\iint\limits_D f(x, y)ds = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\cdot\Delta s_i \qquad (4)$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то предел (4) существует и не зависит ни от способов разбиения области D на элементарные области Δs_i, ни от выбора точек $P_i(x_i, y_i)$ в пределах каждой области.

Если предел (4) существует, то функция $f(x, y)$ называется интегрируемой в области D. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)ds$ функцию $f(x, y)$ называют подынтегральной функцией, D – областью интегрирования, а ds – элементом площади.

Свойство 1. Двойной интеграл от суммы двух функций по области D равен сумме двойных интегралов по области D от каждой из функций в отдельности

$$\iint\limits_D [f(x,y)+\varphi(x,y)]ds = \iint\limits_D f(x,y)ds + \iint\limits_D \varphi(x,y)ds$$

Свойство 2. Постоянный множитель A можно вынести за знак двойного интеграла $\iint\limits_D Af(x,y)ds = A\iint\limits_D f(x,y)ds$

Свойство 3. Если область интегрирования D разбить на две области D_1 и D_2 без общих внутренних точек, то $\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_{D_1} f(x,y)ds + \iint\limits_{D_2} f(x,y)ds$

Свойство 4. Если m есть наименьшее значение и M – наибольшее значение функции $f(x,y)$ в области D, то $m\cdot S \le \iint\limits_D f(x,y)ds \le M\cdot S$, где S – площадь области D.

Свойство 5 (теорема о среднем). Двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)ds$ равен произведению площади S области D на значение подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = f(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}})\cdot S \qquad (*)$$

Значение $f(x_{\text{ср}}, y_{\text{ср}})$, определяемое равенством (*), называется средним значением функции $f(x, y)$ в области D.

Теорема о среднем имеет следующий геометрический смысл: объём цилиндрического тела равен объёму прямого цилиндра с тем же основанием D и с высотой, равной одной из аппликат точек поверхности $z = f(x,y)$; верхнее основание этого цилиндра параллельно нижнему.

§3. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах

В прямоугольной системе координат элемент площади ds можно записать в виде произведения $dx\cdot dy$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Чтобы вычислить двойной интеграл (1), будем рассматривать его как число, выражающее объём соответствующего цилиндрического тела с основанием D, которое ограничено сверху поверхностью $z = f(x,y)$. Рассмотрим сначала частный случай: пусть область D есть прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат (рис. 8).

Известно, что объём тела с помощью определённого интеграла можно найти по формуле $V = \int\limits_a^b S(x)dx$ (2)

где $S(x)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, а $x = a$ и $x = b$ – уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело.

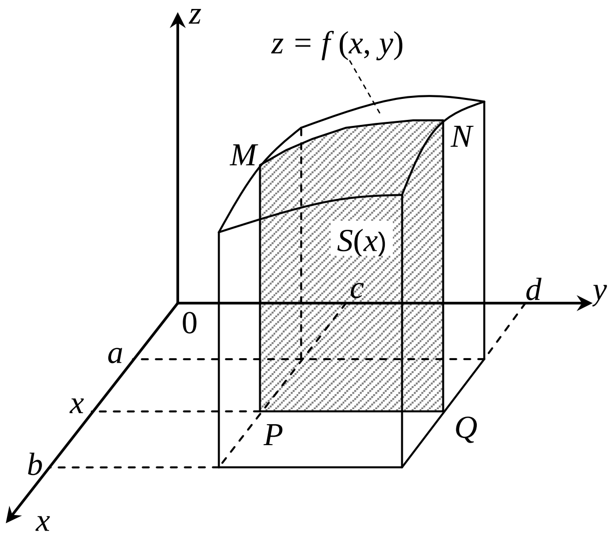


Рис. 8

Как видно из рис. 8, площадь сечения $S(x)$ равна площади криволинейной трапеции $PMNQ$, которая ограничена сверху кривой MN. Площадь этой трапеции можно найти по формуле

$$S(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy \qquad (3)$$

где подынтегральную функцию $f(x, y)$ следует рассматривать как функцию одной только переменной y (x в этом случае считается постоянной). Подставив (3) в (2), получим

$$V = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Так как V можно заменить двойным интегралом (1),

то получаем $\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ (4)

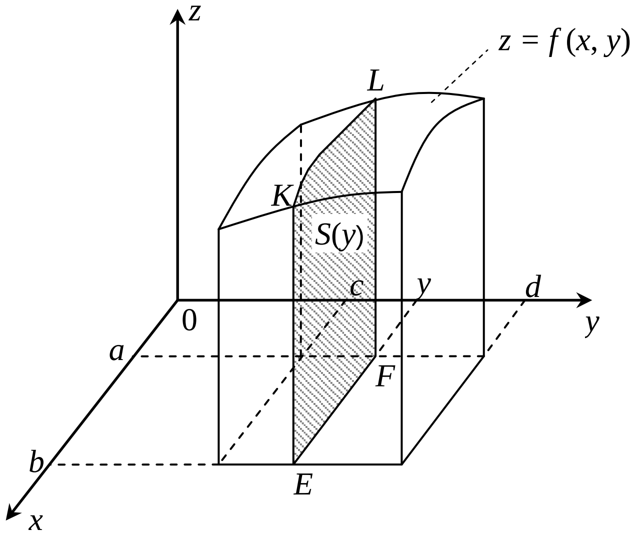


Рис. 9

С другой стороны, объём того же тела можно найти

по формуле $V = \int_c^d S(y) dy$ (5)

где $S(y)$ – площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к оси ординат, а $y = c$ и $y = d$ – уравнения плоскостей, ограничивающих данное тело. Как видно из рис. 9, площадь сечения $S(y)$ равна площади криволинейной трапеции *EKLF*, которая ограничена сверху кривой *KL*. Площадь этой трапеции можно найти по формуле

$$S(y) = \int_a^b f(x, y)dx \qquad (6)$$

где подынтегральную функцию *f(x,y)* следует рассматривать как функцию одной только *x* (*y* в этом случае считается постоянной). Подставив (6) в (5) и заменяя объём *V* двойным интегралом (1), получим

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy \qquad (7)$$

Таким образом, данный двойной интеграл можно вычислить по формуле (4), если внутренний интеграл интегрировать по переменной *y,* а внешний по переменной *x*. С другой стороны, данный двойной интеграл можно вычислить по формуле (7), если внутренний интеграл интегрировать по переменной *x*, а внешний по переменной *y*. Итак,

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx \qquad (8)$$

для прямоугольника. Если область *D* ограничена прямыми $x = a$, $x = b$, $b > a$ и кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $f_2(x) \geq f_1(x)$ на отрезке $[a, b]$, то двойной интеграл можно вычислить по формуле:

$$\iint_B f(x, y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \qquad (9)$$

Формулы (8), (9) показывают, что вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух определённых интегралов. Интегралы в формулах (8) и (9) называются двукратными. Формулы (8), (9) позволяют двойной интеграл привести к двукратному.

Задача. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (10 - x^2 - y^2)dxdy$, если область D есть прямоугольник, стороны которого определены уравнениями $x = 1$; $x = 2$; $y = 0$; y = 2 (рис. 10).

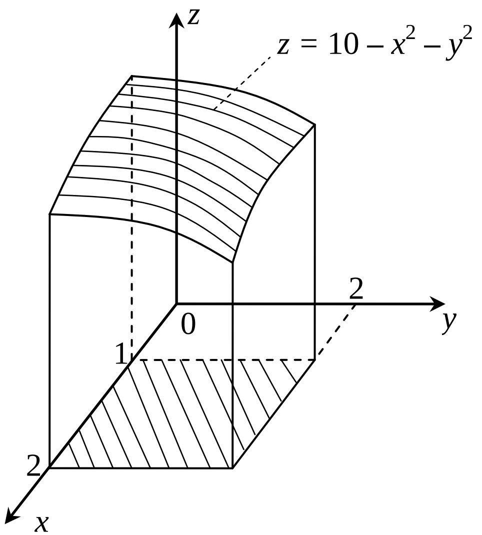


Рис. 10

Решение. Применяем формулу (4).

$$\iint\limits_D (10 - x^2 - y^2)dxdy = \int\limits_1^2 \left(\int\limits_0^2 (10 - x^2 - y^2)dy \right) dx .$$

Вычислим внутренний интеграл. При интегрировании считаем x постоянной величиной

$$\int_0^2 (10-x^2-y^2)dy = \left[10y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = 20 - 2x^2 - \frac{8}{3} = \frac{52}{3} - 2x^2.$$

Тогда

$$\iint_D (10-x^2-y^2)dxdy = \int_1^2 \left(\frac{52}{3} - 2x^2\right)dx = \left[\frac{52}{3}x - \frac{2x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{38}{3}.$$

Изменим порядок интегрирования. Применим формулу (7). $\iint_D (10-x^2-y^2)dxdy = \int_0^2 \left(\int_1^2 (10-x^2-y^2)dx\right)dy$.

Считая y постоянной, вычислим внутренний интеграл.

$$\int_1^2 (10-x^2-y^2)dx = \left[10x - \frac{x^3}{3} - xy^2\right]_1^2 = 20 - \frac{8}{3} - 2y^2 - 10 +$$

$$+\frac{1}{3} + y^2 = \frac{23}{3} - y^2.$$

Тогда

$$\iint_D (10-x^2-y^2)dxdy = \int_1^2 \left(\frac{23}{3} - y^2\right)dy = \left[\frac{23}{3}y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{38}{3}.$$

Как видно, полученные результаты совпадают.

Задача. Вычислить интеграл $\int_3^5 dx \int_1^e \frac{2x-1}{y}dy$.

Решение. При вычислении внутреннего интеграла x считается постоянной, поэтому множитель $(2x-1)$ можно вынести за знак внутреннего интеграла.

Имеем $\int\limits_3^5 dx\int\limits_1^e \frac{2x-1}{y}dy=\int\limits_3^5 (2x-1)dx\int\limits_1^e \frac{dy}{y}=$

$$=\int\limits_3^5 (2x-1)dx\left[\ln y\right]_1^e=\int\limits_3^5 (2x-1)dx[\ln e-\ln 1]=\int\limits_3^5 (2x-1)dx=$$

$$=\left[x^2-x\right]_3^5=25-5-9+3=14.$$

§4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

В прямоугольной системе координат двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области D имел вид

$$\iint\limits_D f(x,y)ds=\iint\limits_D f(x,y)dxdy \qquad (1)$$

Пусть область D задана в полярной системе координат. Если полюс O полярной системы координат совпадает с началом прямоугольной системы, а направление полярной оси совпадает с направлением оси абсцисс, то формулы переход

$$x=r\cos\varphi,\ \ y=r\sin\varphi, \qquad (2)$$

где r и φ – координаты точек области D. В полярной системе координат элемент площади $ds=rdrd\varphi$ и

$$\iint\limits_D f(x,y)ds=\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (3)$$

или $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \qquad (4)$

Формула (4) позволяет преобразовать двойной интеграл в прямоугольных координатах в двойной интеграл в полярных координатах.

Рассмотрим способ вычисления такого интеграла.

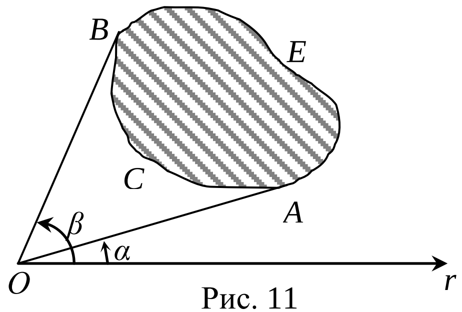


Рис. 11

Пусть контур D пересекается лучами, исходящими из полюса O не более двух раз (рис. 11). Предположим, что область D заключена между лучами OA и OB; пусть луч OA образует с полярной осью угол α, а луч OB образует угол β.

Если $r = r_1(\varphi)$ есть уравнение линии ACB в полярной системе координат, а $r = r_2(\varphi)$ есть уравнение линии AEB в полярной системе координат, то интеграл (4) вычисляется по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr \qquad (5)$$

Если, в частности, полюс O содержится внутри области интегрирования D и любой полярный радиус пересекает контур области в одной точке, то угол φ в этом случае изменяется от 0 до 2π.

Задача. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - y^2}dxdy$, где область D есть круг с центром в начале координат и с радиусом, равным единице.

Решение. Так как $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = rdrd\varphi$, то

$$I = \iint\limits_D \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\, rdrd\varphi = \iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\, rdrd\varphi.$$ Для

заданной области D угол φ меняется от 0 до 2π, а полярный радиус r при любом φ изменяется от 0 до 1. Следовательно,

$$\iint\limits_D \sqrt{1-r^2}\, rdrd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\, rdr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \int\limits_0^1 \left(1-r^2\right)^{\frac{1}{2}} (-2rdr) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \cdot \left[\frac{2}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}\pi.$$

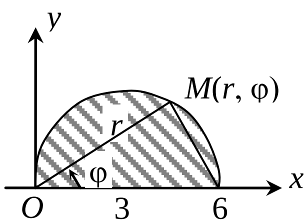


Рис. 12

Задача. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D ydxdy$, где область D есть полукруг с центром в точке (3; 0) и с радиусом, равным 3 (рис. 12).

Решение. Перейдём к полярной системе координат. Пусть полюс совпадает с началом координат, а полярная ось совпадает с положительным направлением оси Ox. Чтобы найти уравнение полуокружности AMO в полярной системе координат, выберем на ней произвольную точку $M(r,\varphi)$ и определим зависимость между полярными координатами r и φ. Как видно, при любом выборе точки M угол AMO будет прямым. Следовательно, $r = OA \cdot \cos\varphi$ или $r = 6\cos\varphi$ (так как $OA = 6$).

Таким образом, в заданной области D полярный радиус r меняется от 0 до $6\cos\varphi$, а полярный угол φ изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$.

Переходя к полярной системе координат, будем иметь $$\iint\limits_D y\,dx\,dy = \iint\limits_D r\sin\varphi\, r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_0^{6\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{6\cos\varphi} = 72\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi = -72\left[\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18$$

.

§5. Геометрические приложения двойного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур

Как известно, объём V тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси

Oz, равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D, т.е. $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Если в области D подынтегральная функция равна единице, то значение интеграла численно равно площади области D. Следовательно, двойной интеграл можно применять для вычисления площадей плоских фигур. Если площадь области D обозначить через S, то $S = \iint\limits_D dxdy$,

$S = \iint\limits_D rdrd\varphi$.

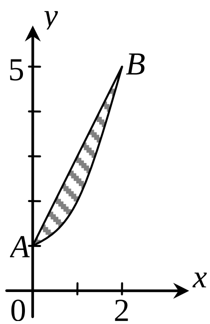


Рис. 13

Задача. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y = 2x + 1$ и параболой $y = x^2 + 1$ (рис. 13).

Решение. Решая совместно систему $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$,

находим точки пересечения этих линий: $A(0, 1)$ и $B(2, 5)$.

Имеем $S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^2+1}^{2x+1} dy = \int\limits_0^2 (2x + 1 - x^2 - 1)dx =$

$$= \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Вычисление объёмов тел

Задача. Вычислить объём тела, ограниченного параболоидом $z = 3x^2 + y^2$, плоскостями $x = 1$ и $y = 2$ и координатными плоскостями (рис. 14).

Решение. Объём V вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле $V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

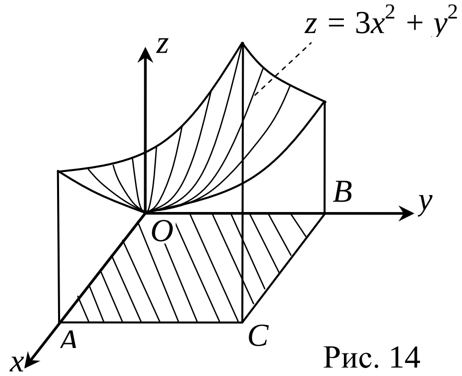


Рис. 14

В данном случае область D – основание тела – есть прямоугольник $OACB$. По условию область D задана неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$.

Следовательно,

$$V = \int_0^1 dx \int_0^2 \left(3x^2 + y^2\right) dy = \int_0^1 dx \left[3x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^2 =$$

$$= \int_0^1 \left(6x^2 + \frac{8}{3} \right) dx = \left[2x^3 + \frac{8}{3} x \right]_0^1 = \frac{14}{3} \text{ куб.ед.}$$

Вычисление площади поверхности

Пусть поверхность, заданная уравнением $z = f(x, y)$, проектируется на плоскость xOy в область D. В этом случае

площадь S этой поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,.$$

Задача. Вычислить площадь части плоскости $x + y + z = 4$, вырезаемой цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ (рис.15).

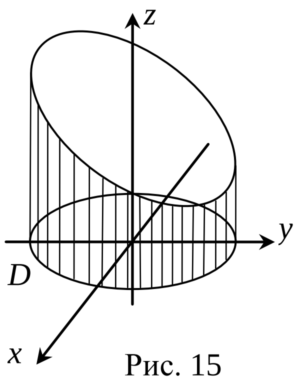


Рис. 15

Решение. Область интегрирования D есть круг радиуса $r = 2$. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

$z = 4 - x - y$; $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$.

Тогда $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2}\, dxdy = \iint\limits_D \sqrt{3} dxdy$.

Чтобы вычислить этот интеграл, введём полярные координаты. Область D определяется: $r = 2$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Следовательно, $S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{3} r dr = \sqrt{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 =$

$= 2\sqrt{3} \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = 4\pi\sqrt{3}$.

§6. Приложения двойных интегралов к задачам механики

Пусть дана материальная пластинка, которая расположена в плоскости xOy и занимает площадь области D. Если на этой пластинке масса распределена с поверхностной плотностью $\delta = f(x, y)$, то масса этой пластинки вычисляется по формуле $M = \iint\limits_D f(x, y) dx dy$.

Задача. Определить массу круглой пластинки радиуса R, если поверхностная плотность $\delta = f(x, y)$ в каждой точке $P(x,y)$ обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра круга.

Решение. По условию имеем $f(x, y) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,

где k – коэффициент пропорциональности. Тогда

$M = \iint\limits_D \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$. Переходя к полярным координатам,

получим $M = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \dfrac{k}{r} r dr = k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[r \right]_0^R = kR \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = 2k\pi R$.

Если $C(x_c, y_c)$ есть центр тяжести пластинки с массой M, то $x_c = \dfrac{M_y}{M} = \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)xdxdy}{M}$;

$y_c = \dfrac{M_x}{M} = \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)ydxdy}{M}$, где M_x и M_y – статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.

Если пластинка однородна, т.е. поверхностная плотность $\delta = f(x,y)$ равна постоянному числу, то $x_c = \dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{S}$; $y_c = \dfrac{\iint\limits_D ydxdy}{S}$, где S – площадь области D, т.е. площадь пластинки.

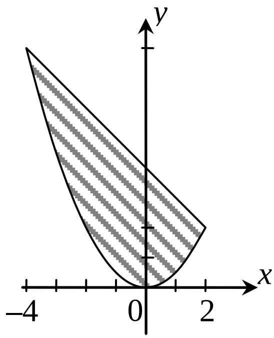


Рис. 16

Задача. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $y = \dfrac{x^2}{2}$ и прямой $y = 4 - x$ (рис. 16).

Решение. Определим площадь S заданной фигуры с помощью двойного интеграла

$S=\iint\limits_D dxdy$. Так как парабола и прямая пересекаются в точках (–4; 8) и (2; 2), то область D определяется неравенствами: $-4\le x\le 2$; $\frac{x^2}{2}\le y\le 4-x$.

$$S=\int_{-4}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}dy=\int_{-4}^{2}\left(4-x-\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[4x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right]_{-4}^{2}=$$

$$=8-2-\frac{8}{6}+16+8-\frac{64}{6}=18;\ S=18.$$

Вычислим M_y:

$$M_y=\iint\limits_D xdxdy=\int_{-4}^{2}xdx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}dy=\int_{-4}^{2}\left(4x-x^2-\frac{x^3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[2x^2-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}\right]_{-4}^{2}=8-\frac{8}{3}-2-32-\frac{64}{3}+32=-18.$$

Следовательно, $x_c=\frac{-18}{18}=-1$. Находим теперь M_x:

$$M_x=\iint\limits_D ydxdy=\int_{-4}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}ydy=\int_{-4}^{2}dx\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x^2}{2}}^{4-x}=$$

$$=\int_{-4}^{2}\left(\frac{(4-x)^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)dx=\int_{-4}^{2}\left(8-4x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}\right)dx=$$

$$=\left[8x-2x^2+\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}\right]_{-4}^{2}=16-8+\frac{8}{6}-\frac{4}{5}+32+32+\frac{64}{6}-\frac{128}{5}=$$

= 57,6. Следовательно, $y_c=\frac{57,6}{18}=3,2$.

Таким образом, $C(-1;\ 3,\ 2)$ – центр тяжести.

§7. Понятие о тройном интеграле

Пусть в прямоугольной системе координат дано некоторое неоднородное тело T, объём которого равен V. Пусть плотность распределения массы в этом теле выражается непрерывной положительной функцией $\delta=f(x,y,z)$ – функцией координат точек тела. Определим массу M данного тела T.

Разобьём тело T произвольным образом на n частей и обозначим объёмы этих частей через Δv_1, Δv_2, Δv_3, ... Δv_n. В каждой части Δv_i выберем произвольным образом точку P_i и будем предполагать, что плотность во всех точках части Δv_i постоянна и равна плотности в точке P_i. Тогда масса M тела T будет приближённо равна сумме

$$M\approx f(P_1)\cdot\Delta v_1+f(P_2)\cdot\Delta v_2+\ldots f(P_n)\cdot\Delta v_n=\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\cdot\Delta v_i \quad (1)$$

Обозначим наибольшее расстояние между точками, принадлежащими части Δv_i, через d_i. За величину массы M тела T принимаем тот предел, к которому стремится сумма (1) при $n\to\infty$ и одновременном стремлении к нулю наибольшего диаметра $\max d_i$.

Сумма (1) называется *n*-й интегральной суммой, а её предел – тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по пространственной области V. Таким образом,

$$M = \lim_{\substack{\max d_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta v_i = \iiint_V f(x, y, z) dv$$

К понятию тройного интеграла, помимо определения массы тела, приводят и другие задачи. Основные свойства тройных интегралов такие же, как и свойства двойных интегралов.

В прямоугольной системе координат элемент объёма $dv = dxdydz$ и тройной интеграл принимает вид $\iiint\limits_V f(x, y, z) dxdydz$.

Если область интегрирования V определяется неравенствами: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, $z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$, то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \qquad (2)$$

Область V ограничена сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, а снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$ и проектируется на плоскость xOy в виде некоторой области, определяемой неравенствами $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$.

Если область V является прямоугольным параллелепипедом, грани которого параллельны координатным плоскостям и заданы уравнениями $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, $z=m$ и $z=n$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d dy\int\limits_m^n f(x,y,z)dz$$

(3)

Задача. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2y+2z\right)dxdydz$, если V ограничена плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=-1$, $y=3$, $z=0$ и $z=2$.

Решение. Для вычисления интеграла применяем формулу (3). $\iiint\limits_V \left(x^2y+2z\right)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 dy\int\limits_0^2 \left(x^2y+2z\right)dz$.

Вычисляем внутренний интеграл, считая при этом x и y постоянными. $\int\limits_0^2 \left(x^2y+2z\right)dz=\left[x^2yz+z^2\right]_0^2=2x^2y+4$.

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 dy\int\limits_0^2 \left(x^2y+2z\right)dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-1}^3 \left(2x^2y+4\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\left[x^2y^2+4y\right]_{-1}^3=\int\limits_0^1 \left(9x^2+12-x^2+4\right)dx=\int\limits_0^1 \left(8x^2+16\right)dx=$$

$$=\left[\frac{8x^3}{3}+16x\right]_0^1=\frac{56}{3}.$$

§8. Вычисление объёма тела

с помощью тройного интеграла

Тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ выражает массу неоднородного тела, объём которого равен *V* и плотность которого $\delta = f(x,y,z)$. Если плотность $\delta = 1$, то тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ будет выражать собой объём области *V*.

Таким образом, $V = \iiint\limits_V dxdydz$.

Задача. Найти объём тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2 + 2$ и плоскостями $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$ (рис. 17).

Решение. По условию область *V* задана неравенствами: $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2 - x$, $1 \le z \le x^2 + y^2 + 2$.

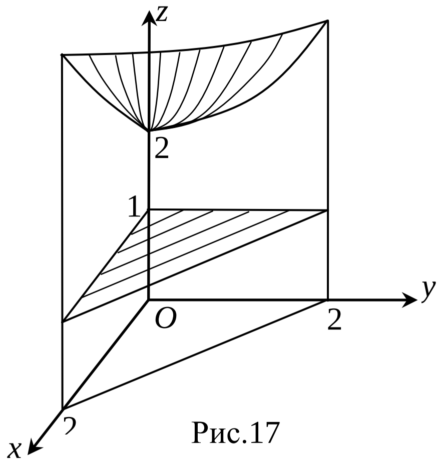


Рис.17

Следовательно,

$$V=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} dy\int_1^{x^2+y^2+2} dz=\int_0^2 dx\int_0^{2-x} dy\left[z\right]_1^{x^2+y^2+2}=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{2-x}\left(x^2+y^2+1\right)dy=\int_0^2 dx\left[x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right]_0^{2-x}=$$

$$=\int_0^2\left[x^2\left(2-x\right)+\frac{\left(2-x\right)^3}{3}+2-x\right]dx=$$

$$=\int_0^2\left(2x^2-x^3+2-x\right)dx+\frac{1}{3}\int_0^2\left(2-x\right)^3 dx=$$

$$=\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}\left(2-x\right)^4\right]_0^2=\frac{14}{3}.$$

Задача. Найти объём тела, ограниченного параболоидом $z=4-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис.18).

Решение. Исключая из заданных уравнений *z*, получим уравнение области *D*, которая является проекцией данного тела на плоскость *xOy*. $4-\dfrac{x^2+y^2}{2}=\sqrt{x^2+y^2}$, откуда $x^2+y^2=4$. Таким образом, область *D* есть круг, радиус которого равен 2.

$$V=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4-\frac{x^2+y^2}{2}} dz=$$

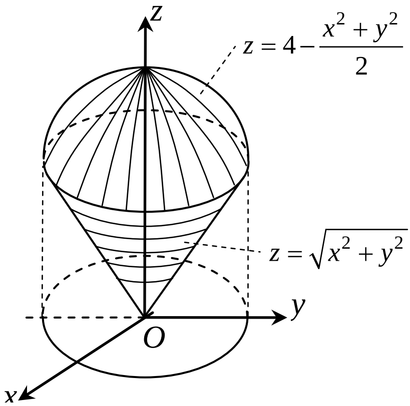


Рис.18

$$= \iint\limits_D \left(4 - \frac{x^2 + y^2}{2} - \sqrt{x^2 + y^2} \right) dxdy .$$

Чтобы вычислить полученный двойной интеграл, перейдём к полярным координатам; так как область D определяется неравенствами $0 \le \varphi \le 2\pi$ и $0 \le r \le 2$, то имеем $V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(4 - \frac{r^2}{2} - r \right) r dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(4r - \frac{r^3}{2} - r^2 \right) dr =$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[2r^2 - \frac{r^4}{8} - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 = \frac{10}{3} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{20}{3} \pi .$$

Глава 11. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Задача о работе переменной силы на криволинейном пути

Пусть материальная точка *M(x,y)* под действием переменной силы $\overline{F}$ движется в некоторой области *D* плоскости *xOy* по кривой *L* от точки *A* к точке *B* (рис. 19). Пусть сила $\overline{F}$, величина и направление которой зависят только от положения точки *M(x,y)*, задана вектором $\overline{F} = P(x,y)\overline{i} + Q(x,y)\overline{j}$, где *P(x,y)* есть проекция вектора $\overline{F}$ на ось *Ox*, а *Q(x,y)* – проекция вектора $\overline{F}$ на ось *Oy*. Определим работу *A*, которую производит сила $\overline{F}$ при перемещении точки *M* по кривой *L* от точки *A* к точке *B*.

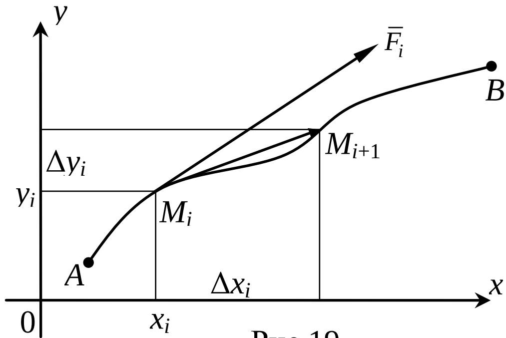


Рис.19

Разобьём кривую *AB* на *n* частей точками: $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, ..., $M_i(x_i, y_i)$, $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$, ..., $M_n(x_n, y_n)$, где $M_0 = A$ и $M_n = B$.

Обозначим через Δx_i и Δy_i приращения координат x_i и y_i при перемещении точки M_i к точке M_{i+1} .

Известно, что если материальная точка движется прямолинейно под действием постоянной силы, то работа, произведённая этой силой, равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения. Поэтому скалярное произведение $\overline{F_i}\cdot\overline{M_iM_{i+1}}$ можно рассматривать как приближённое выражение работы силы $\overline{F}$ вдоль дуги M_iM_{i+1}.

Так как в точке M_i вектор силы $\overline{F_i}=P(x_i,y_i)\overline{i}+Q(x_i,y_i)\overline{j}$, а $\overline{M_iM_{i+1}}=\Delta x_i\overline{i}+\Delta y_i\overline{j}$, то скалярное произведение
$\overline{F_i}\cdot\overline{M_iM_{i+1}}=P(x_i,y_i)\cdot\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\cdot\Delta y_i$.

Приближённое значение работы A силы $\overline{F}$ будет равно сумме $A\approx\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i$. (1)

Переходя к пределу при условии, что $\Delta x_i\to 0$ и $\Delta y_i\to 0$, получим точное выражение работы A.

$$A=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ \Delta y_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i\,. \qquad (2)$$

Предел правой части (2) (независимо от его физического смысла) называют криволинейным интегралом по координатам и обозначают так: $\int\limits_{\cup AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$.

Если кривая L пространственная и сила $\overline{F}$ выражена вектором $\overline{F}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}$, то задача привела бы к криволинейному интегралу вида

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz\,.$$

§2. Криволинейный интеграл по координатам, его простейшие свойства

Пусть в области D плоскости xOy заданы кривая AB и непрерывные функции двух переменных $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Разобьём дугу AB на n частей точками $M_0 = A$, M_1, ..., M_i, M_{i+1}, ..., $M_n = B$. Пусть $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Между точками M_i и M_{i+1} выберем произвольную точку $N_i(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, вычислим значения функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в этой точке и составим следующую сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta x_i + Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta y_i\,. \qquad (1)$$

Сумма (1) называется n-й интегральной суммой, а её предел при условии, что $\Delta x_i \to 0$ и $\Delta y_i \to 0$, называется криволинейным интегралом по дуге $\cup AB$.

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0 \\ \Delta y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} P(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta x_i + Q(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)\Delta y_i.$$

Основные свойства криволинейного интеграла по координатам:

Свойство 1. Если в криволинейном интеграле изменить направление пути интегрирования, то интеграл лишь изменит свой знак, т.е.

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{\cup BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Свойство 2. Если в криволинейном интеграле контур интегрирования разбить на части, то интеграл по всему контуру равен сумме интегралов, взятых по каждой части в отдельности в том же направлении.

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\cup AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$+\int\limits_{\cup CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Свойство 3. Криволинейный интеграл, взятый вдоль замкнутого контура *ABCDA* в определённом направлении, не зависит от начальной (исходной) точки интегрирования.

$$\int\limits_{ABCDA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{BCDAB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

§3. Вычисление криволинейного интеграла по координатам

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению соответствующего определённого интеграла. Пусть требуется вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,. \qquad (1)$$

Если контур интегрирования – линия *AB* – задана уравнением $y = f(x)$, то $dy = f'(x)dx$ и

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{AB} P\left[x, f(x)\right]dx + Q\left[x, f(x)\right] f'(x)dx = \int\limits_{a}^{b} \Phi(x)dx\,, \qquad (2)$$

где $\Phi(x)$ – функция одной переменной x, a и b – абсциссы точек A и B.

Если контур интегрирования – линия AB – задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$ и $y = g(t)$, то, выразив подынтегральное выражение (1) через параметр t, получим

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{AB} P\left[\varphi(t), g(t)\right]\varphi'(t)dt + Q\left[\varphi(t), g(t)\right] g'(t)dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Phi(t)dt\,, \quad (3)$$

где $\Phi(t)$ – функция параметра t, а t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие крайним точкам A и B.

Задача. Вычислить значение криволинейного интеграла $\int\limits_{L}\left(x + y^2\right)dx + 2xydy$ между точками $A(0,\ 0)$ и $B(2,\ 4)$ контура L, если контуром L служит парабола $y = x^2$.

Решение. Применяя формулу (2), будем иметь

$$\int\limits_{L}\left(x + y^2\right)dx + 2xydy = \int\limits_{L}\left(x + x^4\right)dx + 2x \cdot x^2 \cdot 2xdx =$$

$$= \int\limits_{0}^{2}\left(x + 5x^4\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + x^5\right]_0^2 = 34\,.$$

Глава 12. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Физика в своем историческом развитии постепенно превратилась из науки описательной в науку точную. Для характеристики различных явлений и процессов, происходящих в природе и технике, физики все шире используют математические методы, или, как принято говорить, соответствующий математический аппарат. Для этой цели пришлось, прежде всего, ввести меру каждого физического свойства. Пока физики имели дело с простейшими свойствами тел, в качестве меры каждого из них можно было ограничиться скалярными величинами, обычно показывающими, во сколько раз мера данного свойства рассматриваемого тела больше некоторого единичного масштаба. Так, были введены такие скалярные величины, как длина, площадь, объем, масса, время, температура, электрический заряд, энергия и т.п.

Со временем выяснилось, что для количественного описания скорости движения, изменения этой скорости, взаимодействия тел и т.п. скалярные величины не подходят. В этих случаях оказались пригодными более сложные математические величины — направленные отрезки, или векторы. Развитие количественных методов показало, что одно и то же физическое свойство в разных точках исследуемого объекта может принимать различные значения, и поэтому для их математического описания необходимо знать совокупность значений соответствующей величины во всех точках рассматриваемого объекта. Так в *физике постепенно сложилось представление о математическом поле – области пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение некоторой физической величины.*

Поля бывают скалярные и векторные. Каждое из них, в свою очередь может быть стационарным (если физическая величина в каждой точке области со временем не меняется) или в противном случае - нестационарным. Введение понятия поля в физике сыграло такую же прогрессивную роль, как в свое время появление в математике переменной величины.

§1.Скалярные и векторные поля

Множество E точек рассматриваемого пространства, совместно с приписанными этим точкам числами, называется скалярным полем. Скалярным полем часто называют и саму функцию $F(M)$, породившую это поле на точечном множестве E. Если E – множество точек на плоскости, то скалярное поле называется плоским; если же E – множество точек в трехмерном пространстве, то поле называется пространственным.

Примеры скалярных полей различной природы доставляет нам физика. Так, можно говорить о скалярном поле температур в пространстве, занятом нагретым телом (в каждой точке этого пространства температура имеет определенное значение); можно говорить о скалярном поле электрического потенциала в пространстве вокруг электрического заряда и т.п. Известные из физики изотермы (линии равной температуры), изобары (линии равного давления), эквипотенциальные линии (линии равного потенциала) являются примером так называемых линий уровня (понятие дано ниже) в различных плоских физических скалярных полях.

Для пространственного скалярного поля $F(M) = F(x, y, z)$ уравнение $F(x, y, z) = C$ с переменным параметром C определяет семейство поверхностей уровня, т.е. семейство поверхностей, во всех точках каждой из которых скалярное поле $F(M)$ имеет одно и то же значение. Поверхности уровня могут вырождаться в линии и точки. Для сферически симметричного поля, т.е. такого, что значение $F(M)$ зависит только от расстояния точки M до некоторой фиксированной точки N, любая сфера с центром в точке N является поверхностью уровня. Если $F(M) = const$ во всей области E, то множество точек, удовлетворяющих уравнению $F(x, y, z) = C$, либо пусто, либо совпадает со всей областью E.

Градиент скалярного поля $u(M) = u(x,y,z)$ определяется равенством $grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. (1)

В математической теории поля широко используют символическое выражение, обозначаемое $\vec{\nabla}$ ("набла"):

$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, напоминающее по форме вектор, разложенный по базисным ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, где вместо координат вектора записаны операторы дифференцирования $\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}$. Это выражение называют векторным дифференциальным оператором или оператором Гамильтона. С помощью этого оператора (1) можно кратко записать в следующем виде: $grad\ u = \vec{\nabla} \cdot u$. То есть

$$\vec{\nabla} \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{2}$$

Если каждой точке M данной области E соответствует определенный вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области E задано векторное поле. В декартовой системе координат векторное поле $\vec{a}(M)$ задается тремя функциями P, Q, R, определенными в области E:

$$\vec{a}(M) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}\,. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что эти функции во всей области непрерывны вместе с частными производными. Для плоского векторного поля:

$$\vec{a}(M) = P(x, y)\,\vec{i} + Q(x, y)\,\vec{j}\,. \tag{4}$$

Векторной линией данного поля $\vec{a}(M)$ называют такую линию ℓ, в каждой точке которой вектор $\vec{a}(M)$ имеет направление касательной к этой линии. Через каждую точку векторного поля проходит (при условии, что $|\vec{a}(M)| \neq 0$) одна векторная линия. Совокупность всех векторных линий определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}. \qquad (5)$$

Векторные линии характеризуют векторные поля геометрически и дают известную информацию о структуре этого поля. Так, если $\vec{a}(M)$ – стационарное поле скоростей текущей жидкости, то в этом поле векторные линии будут являться траекториями частиц жидкости; они называются в этом случае линиями тока. В векторном поле $\vec{a}(M) = grad\, F(M)$ векторные линии нормальны в каждой точке поверхностям уровня $F(x, y, z) = C$; вдоль этих линий функция $F(M)$ изменяется быстрее всего. В случае плоского векторного поля семейство векторных линий определяется уравнением

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)};\ dz = 0. \qquad (6)$$

Примеры

Пример 1. Найти линии уровня плоского поля $u = x \cdot y$.

Решение. Линии уровня определяются уравнением $x \cdot y = C$ и представляют собой равносторонние гиперболы. При $C = 0$ линиями уровня являются координатные оси Ox и Oy.

Пример 2. Найти поверхности уровня скалярного поля:

$$u = arctg\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Решение. Поверхности уровня определяются уравнением $arctg\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=C$. Отсюда находим $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}=a^2$, где $a=tg\,C,\quad -\dfrac{\pi}{2}<C<\dfrac{\pi}{2}$. Мы видим что поверхностями уровня являются круговые конусы $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$, ось симметрии которых совпадает с осью Oz.

Пример 3. Найти поверхности уровня скалярного поля

$$u=\frac{1}{2x+3y-4z+1}.$$

Решение. Скалярное поле определено для всех точек пространства, кроме точек, расположенных на плоскости:

$$2x + 3y - 4z + 1 = 0$$

Поверхности уровня определяются уравнением

$$2x+3y-4z+1=\frac{1}{C}$$

описывающим семейство параллельных плоскостей:

$2x+3y-4z+C_1=0,$ где $C_1=1-\dfrac{1}{C}.$

Пример 4. Найти поверхности уровня сферически симметричного поля:

$$u=\cos r,\ (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

Решение. Очевидно, что все сферы с центром в начале координат являются поверхностями уровня (при $r = const$ и $u = const$). Для нахождения не просто поверхностей, на которых $u = const$, а всего множества точек с заданным значением поля, нужно решить уравнение $\cos r = C$ $(-1 \le C \le 1)$.

Имеем: $r = \pm \arccos C + 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Отбрасывая отрицательные значения r, найдем, что множество точек, для которых значение поля равно C, состоит из совокупности сфер радиусов $\arccos c$, $\arccos c + 2\pi n$, $-\arccos c + 2\pi n$, где n – целое число. Центры всех этих сфер совпадают с началом координат.

Пример 5. Найти градиент скалярных полей:

а) $u(P) = x$; б) $u(P) = y$; в) $u(P) = z$.

Решение. Применим формулу (1):

а) $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} u = \vec{\nabla} x = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} = \vec{i}$.

Аналогично:

б) в) $\operatorname{grad} u = \vec{\nabla} = y = \vec{k}$ . .

Пример 6. Найти градиент скалярного поля $u(x, y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ в точке $M(2; 1)$.

Решение. По формуле (1): $grad\ u = \dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$. Вычислим частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ в указанной точке:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} = \frac{2}{3}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{4 + x^2 + y^2}} = \frac{1}{3};$$

тогда: $\operatorname{grad} u = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{1}{3}\vec{j}$.

Пример 7. Найти $\mathrm{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})$,. где $\vec{c}$ – постоянный вектор.

Решение. Пусть $\vec{c}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$;

тогда $\vec{c}\cdot\vec{r}=\alpha x+\beta y+\gamma z;$

$$\mathrm{grad}(\vec{c}\cdot\vec{r})=\nabla(\vec{c}\cdot\vec{r})=\nabla(\alpha x+\beta y+\gamma z)=\alpha\vec{\nabla}x+\beta\vec{\nabla}y+\gamma\vec{\nabla}z,$$

с учетом того, что $\vec{\nabla}x=\vec{i},\vec{\nabla}y=\vec{j},\vec{\nabla}z=\vec{k}$

получим $grad(\vec{c}\cdot\vec{r})=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}=\vec{c}$.

Пример 8. Найти векторные линии поля

$\vec{F}(M)=ax\vec{i}-ay\vec{j}-2az\vec{k}\ (a=const)$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий в данном случае имеют вид:

$$\frac{dx}{ax}=-\frac{dy}{ay}=-\frac{dz}{2az}$$

Интегрируя уравнение $\frac{dx}{ax}=-\frac{dy}{ay}$, получим

$\ln|x|+\ln|y|=\ln|c_1|$, или $xy=c_1$. Решение уравнения $\frac{dy}{ay}=\frac{dz}{2az}$ приводит к результату $\ln|y|=\frac{1}{2}\ln|z|+\frac{1}{2}\ln|c_2|$ или $y^2=c_2z$. Следовательно, векторными линиями поля являются линии пересечения гиперболических цилиндров с параболическими:

$$\begin{cases} xy = c_1; \\ y^2 = c_2 z. \end{cases}$$

Пример 9. Найти линии тока плоского потока жидкости, характеризуемого вектором скорости $\vec{a}(M) = xy\,\vec{i} - 2x(x-1)\,\vec{j}$.

Решение. Интегрируя дифференциальное уравнение векторных линий в данном случае $\frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{2x(x-1)}$, получим $(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = c\,(c \geq 0)$. Это эллипсы с осями, параллельными осям координат, и с центром в точке (1, 0).

§2. Циркуляция векторного поля вдоль кривой

Пусть векторное поле
$\vec{a}(M) = P(x;y;z)\cdot\vec{i} + Q(x;y;z)\cdot\vec{j} + R(x;y;z)\cdot\vec{k}$ определено в пространственной области *E*. Выберем в этой области какую-нибудь кривую ℓ. Ориентируем эту кривую, указав на ней положительное направление, для чего установим на ℓ начальную точку *A* и конечную – *B* (см. рисунок). Пусть $\vec{\tau}^{\circ}$ – орт касательной в точке *M* к кривой ℓ, совпадающей по направлению с направлением кривой. Разобьем кривую ℓ любым образом на n "элементарных дуг" длиной ΔS_k ($k=1,2,\ldots,n$) в направлении от *A* к *B* и в произвольном месте каждой элементарной дуги возьмем по точке M_k.

Для k-й элементарной дуги составим произведение

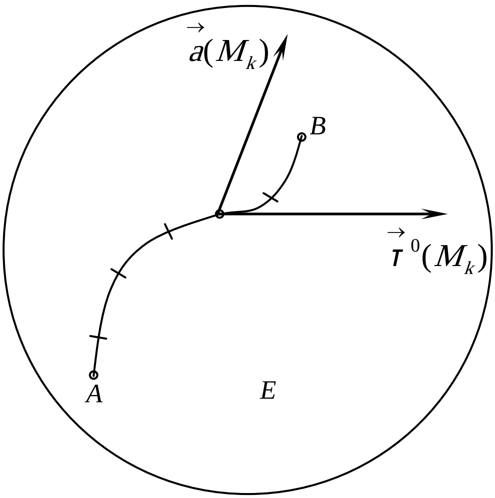
$$(\vec{a}(M_k)\cdot\ \vec{\tau}^{\circ}(M_k))\Delta S_k \qquad (1)$$

а затем просуммируем все подобные произведения по всем k:

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{a}(M_k)\cdot\vec{\tau}^{\circ}(M_k))\Delta S_k \qquad (2)$$

Мы пришли к интегральной сумме второго рода по кривой ℓ. Если функции P, Q, R непрерывны в области E, а $\max\Delta S_k$ – наибольшая из длин ΔS_k , то при условии $\max\Delta S_k \to 0$ сумма (2) стремится к конечному пределу, которым является криволинейный интеграл второго рода от функции $(\vec{a}(M)\cdot\vec{\tau}^{\circ}(M))$ по кривой ℓ:

$$\int_{l}(\vec{a}(M)\cdot\vec{\tau}^{0}(M))ds\,. \qquad (3)$$



Вводя в рассмотрение векторный элемент $d\vec{s} = \vec{\tau}^{\circ}ds$

линии ℓ с координатами dx, dy, dz, можем представить интеграл (3) в координатной форме:

$$\int_l (\vec{a}\cdot\vec{\tau}^{\,0})ds = \int_l P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz\,. \quad (4)$$

Особенно большую роль играет в теории поля криволинейный интеграл (4) в случае, когда кривая ℓ, по которой он берется, замкнута, т.е. в случае когда конец *B* этой кривой совпадает с ее началом *A*. В этом случае криволинейный интеграл (4) называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутой кривой ℓ и обозначается символом $\Gamma_\ell(\vec{a})$:

$$\Gamma_l(\vec{a}) = \int_l (\vec{a}\cdot\vec{\tau}^{\,0})ds =$$

$$= \int_l P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz \quad (5)$$

Примеры

Пример 1. Вычислить циркуляцию плоского векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i} + x\vec{j}$ вдоль кривой $x = 3\cos t$, $y = \sin t$ с обходом по часовой стрелке.

Решение. Данная кривая является эллипсом. Обход кривой совершается по часовой стрелке, поэтому t меняется от 2π до 0. Следовательно, циркуляция вычисляется следующим образом:

$$\Gamma = \oint_\gamma (\vec{a}\cdot d\vec{r}) = \int_{2\pi}^{0} (-3\sin^3 t + 3\cos^2 t)dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_{2\pi}^{0}(1-\cos 2t)dt = -3\pi.$$

Ответ: –3π.

Пример 2. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j} + \vec{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1,\ z = 0$ в положительном направлении.

Решение. Параметрическое уравнение окружности: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 0,\ 0 \le t \le 2\pi.$

По определению циркуляции получаем:

$$\Gamma = \oint_l (-y)dx + xdy + 1\cdot dz =$$

$$= \int_0^{2\pi}((-\sin t)(-\sin t) + \cos t\cos t)dt =$$

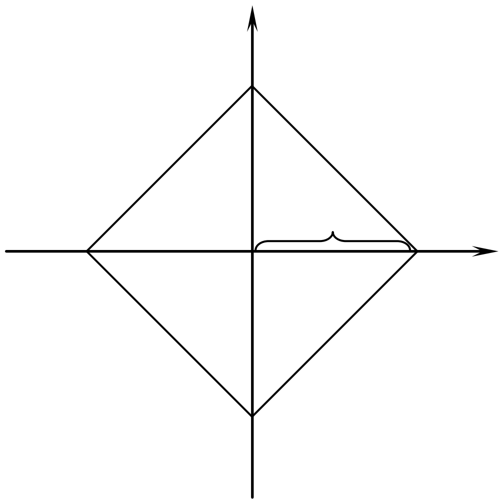
$$= \int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Ответ: 2π.

Пример 3. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = xyz\vec{i} + (x + y + z)\vec{j} - x^2y^2\vec{k}$ вдоль контура квадрата *ABCDA*, определяемого уравнениями: $-x + y = a$; $x + y = a$; $x - y = a$; $x + y = -a$; $z = 0$.

Решение. Имеем:

$(\vec{a}\cdot d\vec{r}) = xyzdx + (x + y + z)dy - x^2y^2dz = (x + y)dy$, так как $z = 0$ и $dz = 0$. Разбиваем искомую циркуляцию на четыре линейных интеграла, причем в качестве параметра на каждой стороне квадрата выбираем координату y:



$$\Gamma = \int\limits_{AB} (\vec{a} \cdot d\vec{r}) + \int\limits_{BC} (\vec{a} \cdot d\vec{r}) + \int\limits_{CD} (\vec{a} \cdot d\vec{r}) + \int\limits_{DA} (\vec{a} \cdot d\vec{r}) =$$

$$= \int\limits_{AB} (x+y)dy + \int\limits_{BC} (x+y)dy + \int\limits_{CD} (x+y)dy + \int\limits_{DA} (x+y)dy =$$

$$= \int_0^a (2y-a)dy + \int_a^0 a dy + \int_0^{-a} (2y+a)dy + \int_{-a}^0 (-a)dy = -2a^2$$

Ответ: $-2a^2$.

§3.Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция

Пусть функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области D и $z_1(x, y) \le z_2(x, y)$.

Область $G = \{(x, y, z) | (x, y) \in D,\ z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\}$ называется z–цилиндрической. Аналогично определяются x–цилиндрическая и y–цилиндрическая области. Область G

называется простой, если ее можно разбить на конечное число как x–цилиндрических, так и y–цилиндрических и z-цилиндрических областей.

Теорема. Пусть функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой замкнутой области G, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью Φ. Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_\Phi Pdydz + Qdzdx + Rdxdy\,, \quad (1)$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности Φ, которая служит границей G.

Формула (1) называется формулой Остроградского-Гаусса.

Следствие. Если функции P, Q, R таковы, что $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1$, то интеграл в левой части равенства (1) равен объему области G, т.е. $\iiint\limits_G dxdydz = V(G)$, и из формулы (1) получается формула для вычисления объема области G с помощью интеграла по ее поверхности: $V(G) = \iint\limits_\Phi Pdydz + Qdzdx + Rdxdy.$

Пример 1. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл

$\Pi = \iint\limits_\Phi x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где Ф – внешняя сторона сферы $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Решение. По формуле Остроградского-Гаусса имеем:

$$\Pi = \iiint\limits_{G} (2x + 2y + 2z)\,dxdydz,$$

где G – шар $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 \le R^2$. Для вычисления интеграла перейдем к сферическим координатам:
$x = a + \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = b + \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = c + \rho\cos\theta$,
$0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Якобиан перехода равен $\rho^2\sin\theta$. Уравнение границы области G имеет вид $\rho = R$. Следовательно,

$$\Pi = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \rho^2 (a + b + c + \rho(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\sin\theta +$$

$$+\cos\theta))d\rho = \frac{8}{3}\pi(a + b + c)R^3.$$

Ответ: $\frac{8}{3}\pi(a + b + c)R^3$.

Пусть задана ориентированная поверхность $(\varPhi)$, т.е. такая поверхность, в каждой точке которой выбран единичный вектор

$\vec{n}(M) = \cos\alpha(M)\,\vec{i} + \cos\beta(M)\,\vec{j} + \cos\gamma(M)\,\vec{k}$, меняющийся на поверхности непрерывно. В случае замкнутой поверхности в качестве $\vec{n}(M)$ будем всегда выбирать вектор внешней нормали.

Потоком П векторного поля $\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность (Ф) называют поверхностный интеграл (второго рода): $\Pi = \iint\limits_{(\varPhi)} (\vec{a} \cdot \vec{n})\,ds$.

Дивергенция (расходимость) векторного поля $\vec{a}(M)$ может быть определена выражением:

$div\,\vec{a}(M)=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$, т.е. дивергенция векторного поля $\vec{a}(M)$ представляет собой скалярное поле в области G.

Если $\vec{a}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ – разложение векторного поля $\vec{a}$ *по ортам* $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$, то формулу, определяющую поток, можно записать в виде:

$$\varPi=\iint\limits_{(\varPhi)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,ds,$$

либо записать в форме поверхностного интеграла (второго рода):

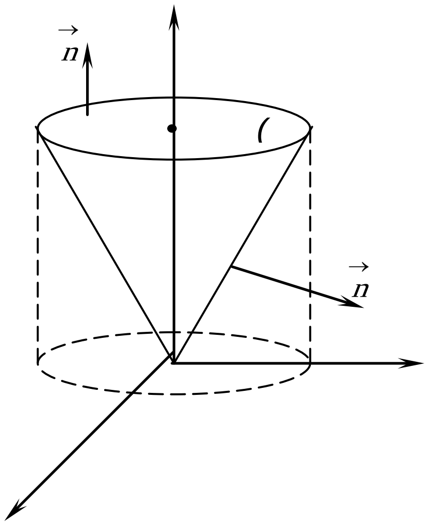
$$\varPi=\iint\limits_{(\varPhi)}Pdydz+Qdxdz+Rdxdy.$$

Теперь теорему Остроградского-Гаусса можно сформулировать следующим образом: поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

Пример 2. Найти поток векторного поля $\vec{a}=y\vec{i}-x\vec{j}+z\vec{k}$ через замкнутую поверхность ($\varPhi$), состоящую из поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ и плоскости $z=1$.

Решение. Имеем

$$div\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}y+\frac{\partial}{\partial y}(-x)+\frac{\partial}{\partial z}z=1.$$



Следовательно, $\varPi=\iiint\limits_{(G)}div\vec{a}\,dv=\iiint\limits_{(G)}dv=V$, где V– объем конуса.

Так как $V=\frac{1}{3}\pi R^2H$, то $\varPi=\frac{1}{3}\pi$.

Ответ: $\pi/3$.

Пример 3. Найти поток векторного поля $\vec{a}=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}+zx^2\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

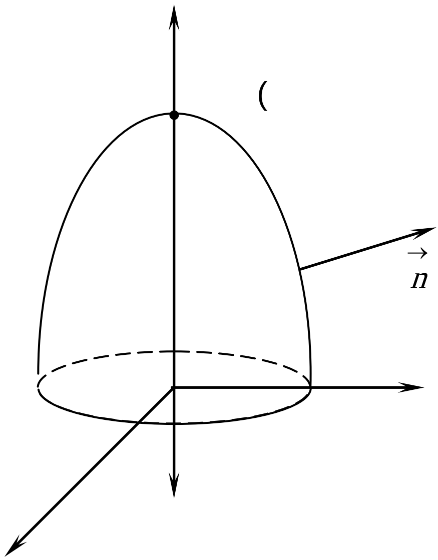
Решение. В данном случае поверхность ($\varPhi$) – замкнутая, поэтому для вычисления потока можно применить формулу Гаусса - Остроградского. Имеем

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + z^2 + x^2 = \rho^2,\ П = \iiint\limits_{(G)} \rho^2\, dv$$

.

Вычисляем интеграл в сферических координатах:

$$П = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{R} \rho^4 d\rho = \frac{4}{5}\pi R^5 .$$



Пример 4. Найти поток векторного поля $\vec{a} = y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} + \vec{k}$ через часть поверхности параболоида $1 - z = x^2 + y^2$ $(0 \le z \le 1)$.

Решение. Обозначим данную поверхность через $(Ф_1)$ и рассмотрим замкнутую поверхность $(Ф) = (Ф_1) \cup (Ф_2)$, где $(Ф_2)$ – круг радиуса $R = 1$ на плоскости XOY. Из формулы Гаусса-Остроградского вытекает, что поток через поверхность $(Ф)$ равен нулю. Действительно, для данного поля

$$div\vec{a}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}y^2+\frac{\partial}{\partial y}x^2+\frac{\partial}{\partial z}\cdot 1=0.$$

Следовательно, $\iint\limits_{(\Phi_1)}(\vec{a}\cdot\vec{n})ds+\iint\limits_{(\Phi_2)}(\vec{a}\cdot\vec{n})ds=0$. Отсюда искомый поток через поверхность (Φ_1):

$$\iint\limits_{(\Phi_1)}(\vec{a},\vec{n})ds=-\iint\limits_{(\Phi_2)}(\vec{a},-\vec{k})ds=\iint\limits_{(\Phi_2)}ds=\pi.$$

Ответ: π.

Пример 5. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить поток векторного поля

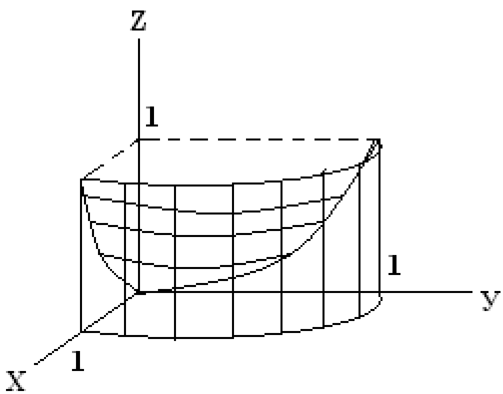
$\vec{a}=x^2\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\vec{k}$ через полную поверхность конуса $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$.

Решение. Найдем дивергенцию векторного поля: $div\vec{a}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2)+\frac{\partial}{\partial z}(z^2)=2(x+y+z)$. Тогда

$$\Pi=\iiint\limits_{(G)}div\,\vec{a}\,dxdydz=2\iiint\limits_{(G)}(x+y+z)dxdydz=$$

$$=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi+z)dz=\frac{\pi}{3}.$$

Пример 6. Вычислить поток векторного поля $\vec{F}=xz\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+y^2z\vec{k}$ через полную поверхность, ограниченную цилиндром $x^2+y^2=1$, параболоидом вращения $z=x^2+y^2$, координатными плоскостями (поверхности находятся в первом октанте).



*Решение***.** Поток векторного поля через замкнутую поверхность в направлении внешней нормали равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля, который берется по объему, который ограничивает данную поверхность.

Дивергенцией векторного поля $\vec{F} = P(x;y;z)\vec{i} + Q(x;y;z)\,\vec{j} + R(x;y;z)\vec{k}$ (дивергенцию принято обозначать div) называется скалярное поле

$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Вычислим дивергенцию нашего векторного поля $\vec{F} = xz\vec{i} + x^2 y\,\vec{j} + y^2 z\vec{k}$:

$$div\vec{F} = \frac{\partial(x \cdot z)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2 \cdot y)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2 \cdot z)}{\partial z} = z + x^2 + y^2.$$

Поэтому наш поток равен:

$$\Pi = \oiint\limits_s \vec{F}\vec{n}ds = \oiint\limits_s xz\cos\alpha\, ds + x^2 y\cos\beta\, ds + y^2 z\cos\gamma\, ds =$$

$$= \iiint\limits_V \left(z + x^2 + y^2\right) dV.$$

Перейдем в цилиндрическую систему координат. Найдем пределы интегрирования:

$$\begin{cases} 0 < z < x^2 + y^2, \text{ тогда } 0 < z < \rho^2 \\ 0 < \rho < 1 \\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2} \\ dV = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot dz \end{cases}$$

Тогда: $\mathit{П} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho \cdot d\rho \int\limits_0^{\rho^2} \left(z + \rho^2\right) dz = \dfrac{\pi}{8}.$

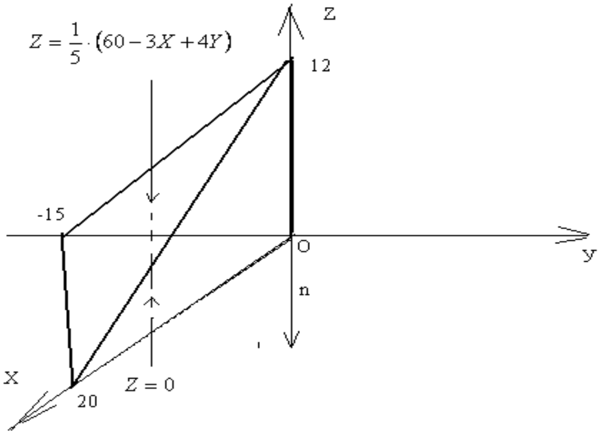
Разъясним, как вычислялся последний интеграл:

$$\int\limits_0^{\rho^2} \left(z + \rho^2\right) d\rho = \left(\frac{z^2}{2} + \rho^2 \cdot z\right)\Bigg|_0^{\rho^2} = \frac{3 \cdot \rho^4}{2}.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{3 \cdot \rho^5}{2} d\rho = \frac{1}{4}.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{8}.$$

Пример 7. Вычислить поток векторного поля $\vec{F} = 0\vec{i} + 5y\,\vec{j} + 0\vec{k}$ через полную поверхность пирамиды, составленной из координатных плоскостей и плоскости $3x - 4y + 5z = 60$.



Решение. Вычислим дивергенцию векторного поля $\vec{F}=0\vec{i}+5y\,\vec{j}+0\vec{k}$.

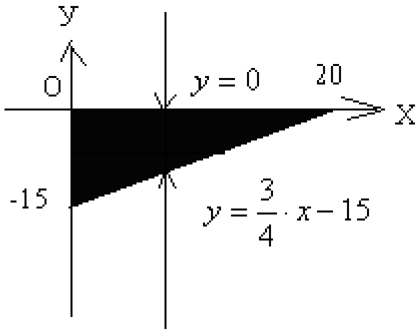
$$div\vec{F}=\frac{\partial(0)}{\partial x}+\frac{\partial(5y)}{\partial y}+\frac{\partial(0)}{\partial z}=5.$$

Поэтому поток векторного поля равен следующему тройному интегралу: $\Pi=\iiint\limits_V 5dV$, где V – объем всей пирамиды.

Из рисунка видно, что пределы интегрирования по Z будут следующими: $0<z<\frac{1}{5}\cdot\left(60-3x+4y\right)$.

Пределы интегрирования по x и по y находятся из анализа проекции объема на плоскость xOy Откуда находим, что: $0<x<20$ и $\frac{3}{4}\cdot x-15<y<0.$

Поэтому интеграл $\Pi=\iiint\limits_V 5dV$ сводится к следующему трехкратному: $\Pi = \int\limits_0^{20} dx \int\limits_0^{\frac{3}{4}\cdot x-15} dy \int\limits_0^{\frac{1}{5}\cdot(60-3x+4y)} 5dz = 3000.$



Потому что:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{5}(60-3x+4y)} 5dz = 5z\Big|_0^{(60-3x+4y)/5} = 60-3x+4y.$$

$$\int\limits_0^{\frac{3}{4}x-15} (60-3x+4y)dy = \left(60y-3xy+2y^2\right)\Big|_0^{\frac{3}{4}x-15} =$$

$$= 90x - \frac{9}{4}x^2 - 900 + \frac{1}{8}\cdot(3x-60)^2.$$

$$\int\limits_0^{20}\left(90x - \frac{9}{4}\cdot x^2 - 900 + \frac{1}{8}\cdot(3x-60)^2\right)dx =$$

$$= \left(45x^2 - \frac{3x^3}{4} - 900x + \frac{1}{24}(3x-60)^3\right)\Bigg|_0^{20} =$$

$$= 45\cdot 20^2 - \frac{3\cdot 20^3}{4} - 900\cdot 20 + 0 - \left(\frac{1}{24}\cdot(-60)^3\right) = 3000.$$

Примечание. Можно было бы в данной задаче подойти проще к вычислению потока. У нас дивергенция постоянна, то есть $div\vec{F} = 5$. *В этом случае можно сделать так.*

$\Pi = \iiint\limits_V 5dV = 5 \cdot \iiint\limits_V dV$. *Но с геометрической точки зрения* $\iiint\limits_V dV$ *есть объем области, по которой ведется интегрирование, то есть объем пирамиды, который не составляет труда вычислить по школьным формулам.*

Поэтому:

$$\Pi = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot H \right) = 5 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{20 \cdot 15}{2} \cdot 12 \right) = 3000.$$

§4. Формула Стокса

Пусть в области G определено векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$; L – замкнутый контур, лежащий в области G; Φ – произвольная поверхность, границей которой является контур L; $\Phi \subset G$ (говорят "поверхность Φ натянута на контур L"); $\vec{n}(M) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичный вектор нормали на выбранной стороне поверхности Φ.

Поверхность Φ называется xyz-проектируемой, если она однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$. Такую поверхность можно задать с помощью любого из уравнений: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G_1$; $x = x(y, z)$, $(y, z) \in G_2$; $y = y(z, x)$,

$(z, x) \in G_3$.

Пусть Φ – гладкая xyz-проектируемая ориентированная поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром L и расположенная внутри области G, в которой функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. Тогда справедлива формула Стокса

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{\Phi} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] ds.$$

где ориентация контура L согласована с ориентацией поверхности Φ. Левая часть формулы Стокса есть циркуляция векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура L, а правая часть представляет собой поток через поверхность Φ векторного поля с координатами $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.

Эта формула названа по имени английского физика и математика Д. Стокса. Её формулу можно переписать также в следующем виде:

$$\iint\limits_{\Phi} ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy =$$

$$= \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Формула Стокса остается верной для иной ориентированной поверхности Ф с кусочно-гладким краем L , которую можно разбить при помощи кусочно-гладких линий на конечное число гладких кусков, проецирующихся на все три плоскости координат. Ориентированная поверхность, которую можно разбить на конечное число плоских треугольников, называется полиэдральной поверхностью и представляет собой пример простейшей поверхности, к которой применима формула Стокса.

Пример 1. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ в положительном направлении.

Решение. В этом случае $P = y$; $Q = x$; $R = 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1); \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

По формуле Стокса

$$\Gamma = \iint\limits_{(\Phi)} (1 - (-1)) dxdy = 2 \iint\limits_{(\Phi)} dxdy = 2 \int_0^{2\pi} dx \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi.$$

Пример 2. Применяя формулу Стокса, вычислить интеграл: $I = \oint\limits_L ydx + zdy + xdz$, где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной оси Ox.

*Решение***.** Применив формулу Стокса и взяв в ней в качестве поверхности Φ круг радиуса a, лежащий в плоскости $x + y + z = 0$, получаем:

$$I = -\iint\limits_{(\Phi)} dydz + dzdx + dxdy = -\iint\limits_{\Phi} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ds,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности Φ – плоскости $x + y + z = 0$, так как нормаль этой плоскости образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то в каждой из формул для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ перед знаком радикала возьмем знак "+".

Очевидно, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, в силу чего имеем:

$$I = -\sqrt{3}\oiint_S ds = -\sqrt{3}\pi a^2$$

Ответ: $-\sqrt{3}\pi a^2$.

Пример 3. Применяя формулу Стокса, вычислим интеграл: $I = \oint_L y^2z^2dx + x^2z^2dy + x^2y^2dz$, L – замкнутая кривая $x = a\cos t$, $y = a\cos 2t$, $z = a\cos 3t$, пробегается в направлении возрастания параметра t.

Решение. При изменении t от 0 до π подвижная точка $M(x, y, z)$ пробегает кривую L от точки $M_0(a, a, a)$ до точки $M_1(-a, a, -a)$, а при изменении t от π до 2π точка M пробегает ту же самую часть кривой L в противоположном направлении – от точки M до точки M_0. Таким образом, точки замкнутой кривой L взаимно накладываются и кривая L не ограничивает никакой поверхности, вследствие чего

$I = 0$.

Ответ: 0.

§5. Ротор векторного поля

С понятием циркуляции тесно связано понятие ротора, или вихря. Циркуляция характеризует завихренность векторного поля вдоль всего контура. Локальной характеристикой поля, связанной с завихренностью, является ротор.

Рассмотрим сначала плоское векторное поле $\vec{a}$ и какой-то контур L , окружающий выбранную точку M_0. Величину площади области, заключенной внутри L, обозначим через S. Тогда отношение $\frac{1}{S}\oint\limits_L(\vec{a}\cdot d\vec{z})$ (1) дает среднюю плотность циркуляции вектора $\vec{a}$ на площадке S. Плотность циркуляции в точке M_0 характеризуется пределом выражения (1) при условии стягивания контура L в точку M_0, тогда площадь S, охватываемая контуром L, стремится к нулю, таким образом, если предел $\lim\limits_{\substack{L\to M_0\\(S\to 0)}}\frac{1}{S}\oint\limits_L(\vec{a}\cdot d\vec{r})$ существует, то он дает величину завихренности поля в точке M_0.

Если векторное поле $\vec{a}$ - пространственное, то можно говорить о завихренности поля в каком-либо направлении $\vec{n}$.

Ротором векторного поля $\vec{a}$ в точке M_0, обозначаемым $rot\,\vec{a}$, называется вектор, проекция которого на каждое направление $\vec{n}$ равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру L плоской области G, перпендикулярной этому направлению, к величине площади S этой области, когда размеры площади стремятся к нулю, а сама область стягивается в точку M_0, т.е.

$$Пр_{\vec{n}}\, rot\,\vec{a} = (rot\,\vec{a})_{\vec{n}} = \lim_{\substack{L\to M_0\\(S\to 0)}} \frac{1}{S}\oint_L (\vec{a}\cdot d\vec{r}),$$

где L – контур, лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}$, S- площадь области, ограниченной этим контуром.

Если задано векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$, где функции P, Q и R – непрерывно дифференцируемые в соответствующей области, то

$$rot\,\vec{a} = (R'_y - Q'_z)\,\vec{i} + (P'_z - R'_x)\,\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\,\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Пример 1. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} - z^2\,\vec{k}$.

Решение. $R'_y = Q'_z = P'_z = R'_x = Q'_x = P'_y = 0$, то $rot\,\vec{a} = \vec{0}$.

Ответ: $\vec{0}$.

Пример 2. Найти *rot (grad u)*, если $u=x^2+y^2+z^2$.

Решение. Поскольку $grad\ u = 2x^2\vec{i} + 2y^2\vec{j} + 2z^2\vec{k}$,

то $rot\ (grad\ u) = \vec{0}$.

Ответ: $\vec{0}$.

Пример 3. Найти ротор поля скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$.

Решение. Как известно, скорость твердого тела определяется по формуле

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\vec{j} +$$

$$+(y\omega_x - x\omega_y)\vec{k}.$$

Отсюда находим

$$rot\ \vec{\upsilon} = \nabla \times \vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_x & x\omega_x - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} =$$

$$= 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + 2\omega_z \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Таким образом, $rot\,\vec{\upsilon}$, характеризуя "вращательную компоненту" поля скоростей, равен удвоенной скорости вращения.

Пример 5. Вычислить ротор векторного поля:

$\vec{a} = y^2\,\vec{i} - x^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$.

Решение. $rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x+y)\,\vec{k}$.

Ответ: $-2(x+y)\,\vec{k}$.

§6. Потенциальное поле и его свойства

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называют потенциальным в области (G), если существует такая скалярная функция (скалярное поле) $\upsilon(M)$, заданная в (G), что для всех точек этой области: $\vec{a}(M) = grad\,\upsilon(M)$. Функцию $\upsilon(M)$ называют потенциалом поля $\vec{a}(M)$.

В потенциальном поле линейный интеграл не зависит от формы пути и определятся только начальной и конечной точками пути, а именно

$$\oint_L (\vec{a} \cdot d\,\vec{r}) = \upsilon(M) - \upsilon(M_0),$$

где M_0 и M – начальная и конечная точка линии (L).

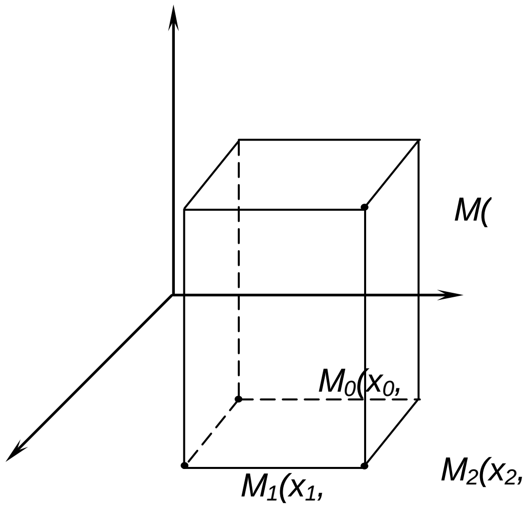
Верно и обратное: если линейный интеграл поля

$\vec{a}$(M) не зависит от пути, то поле $\vec{a}$(M) потенциально. Потенциал поля определяется с точностью до постоянного слагаемого. Это означает, что если $\upsilon(M)$ один из потенциалов поля $\vec{a}(M)$, то выражения $\upsilon(M)+C$ при любом постоянном C также являются потенциалами поля. Задание величины потенциала в какой- либо точке M_0 области (V) однозначно определяет потенциал любой точки M: $\upsilon(M)=\upsilon(M_0)+\int_{M_0}^{M}(\vec{a}\cdot d\vec{r})$ (*), где вместо

$\int_{(L)}(\vec{a}\cdot d\vec{r})$ использовано обозначение $\int_{M_0}^{M}(\vec{a}\cdot d\vec{r})$, поскольку интеграл не зависит от пути.

Если поле задано в декартовой координатной форме: $\vec{a}(M)=P(x,y,z)\,\vec{i}+Q(x,y,z)\,\vec{j}+R(x,y,z)\,\vec{k}$, то для нахождения потенциала точки $M(x, y, z)$ удобно взять линейный интеграл по ломаной $M_0M_1M_2M$, звенья которой параллельны координатным осям.

Предполагается, конечно, что ломаная $M_0M_1M_2M$ не выходит за пределы области (G). При таком выборе пути интегрирования и при дополнительном условии $\upsilon(M_0)=0$ выражение (*) принимает вид:



$$\upsilon(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz \qquad (*)$$

При использовании этой формулы следует иметь в виду, что в каждом из трех входящих в нее интегралов одной буквой обозначают и верхний предел, и переменную интегрирования, т.е. $\int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt;$

$$\int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)dy = \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt;$$

$$\int_{z_0}^{z} R(x, y, z)dz = \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt.$$

Отметим, что потенциальность поля $\vec{a}(M)$ и равенство нулю циркуляции поля по искомому простому кусочно-гладкому замкнутому контуру являются эквивалентными свойствами.

Если поле $\vec{a}(M)$ потенциально в области (G), то в любой точке этой области $rot\,\vec{a}(M)=\vec{0}$. Это свойство потенциального поля является наиболее важным. Таким образом, потенциальное поле $\vec{a}$(M) является безвихревым. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако, если ограничиться поверхностно односвязными областями, то для таких областей понятия потенциального и безвихревого полей оказываются эквивалентными.

Пример 1. Проверить, что поле

$\vec{a}=(y+z)\,\vec{i}+(z+x)\,\vec{j}+(x+y)\,\vec{k}$ является потенциальным, и найти его потенциал.

Решение. Поле $\vec{a}$ определено во всем пространстве, т.е. в односвязной области, поэтому достаточно проверить, что $rot\,\vec{a}$=0. Имеем:

$$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=(1-1)\,\vec{i}+(1-1)\,\vec{j}+(1-1)\,\vec{k}=\vec{0},$$

что и доказывает потенциальный характер поля $\vec{a}$.

Найдем потенциал двумя способами.

1 способ.

Для нахождения потенциала воспользуемся формулой (∗), беря в качестве M_0 начало координат:

$$\upsilon(x,y,z)=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z R(x,y,z)dz=$$

$$=\int_0^x 0dx+\int_0^y xdy+\int_0^z (x+y)dz=0+xy+(x+y)z=xy+yz+zx.$$

2 способ.

Будем снова считать $M_0(0, 0, 0)$.

Пусть $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, а точка N пробегает отрезок M_0M; ее радиус-вектор $\vec{\rho} = \vec{r}\,t (0 \le t \le 1)$. Точка N имеет координаты t_x, t_y, t_z.

Отсюда $d\vec{\rho} = \vec{r}\,dt$. Положим $\upsilon(M_0)=0$, тогда

$$\upsilon(M)=\int_0^M (\vec{a}(N)\cdot d\vec{\rho})=\int_0^1 (\vec{a}(t)\cdot\vec{r})dt.$$

Для рассматриваемого поля

$$\vec{a}(t) = t(y+z)\vec{i} + t(z+x)\vec{j} + t(x+y)\vec{k}.$$

$(\vec{a}(t)\vec{r}) = t(y+z)x + t(z+x)y + t(x+y)z = 2t(xy + yz + zx).$

Следовательно,

$$\upsilon(M) = (xy+yz+zx)\int_0^1 2tdt = xy + yz + zx.$$

Ответ: $xy + yz + zx$.

Пример 2.Доказать, что циркуляция потенциального поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

Решение: Пусть $\vec{a}$ – потенциальное поле и (L) – замкнутый контур, началом и концом которого является точка M ($M = M_0$).

Тогда $\Gamma = \oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \upsilon(M) - \upsilon(M_0) = \upsilon(M) - \upsilon(M_0) = 0$,

что и требовалось доказать.

§7. Соленоидальное поле и его свойства

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называют соленоидальным в области (G), если во всех точках этой области $div\,\vec{a}(M) = 0$.

С понятием соленоидального поля тесно связано понятие векторного потенциала. Если в области (G), в которой определено поле $\vec{a}(M)$, существует такое векторное поле $\vec{A}(M)$, что в каждой точке области (G) $\vec{a}(M) = rot\,\vec{A}(M)$, то векторное поле $\vec{A}(M)$ называют векторным потенциалом поля $\vec{a}(M)$ в области (G).

Для поля $\vec{a}(M)$, обладающего векторным потенциалом в области (G), поток через любую замкнутую поверхность, содержащуюся в области (G), равен нулю.

Поле $\vec{a}(M)$, обладающее векторным потенциалом в области (G), является в ней соленоидальным. Обратное, вообще говоря, неверно: для произвольно взятой области (G) соленоидальность поля $\vec{a}(M)$ еще не гарантирует существования во всей области (G) векторного потенциала поля $\vec{a}(M)$. Однако, если ограничиться пространственно-односвязными областями, то соленоидальность поля и наличие у него векторного потенциала являются эквивалентными свойствами. Таким образом, в пространственно-односвязной области условие $div\,\vec{a}=0$ является необходимым и достаточным для существования векторного потенциала.

Из формулы Остроградского-Гаусса следует, что если соленоидальное поле задано в односвязной области, то поток вектора через любую замкнутую поверхность, принадлежащую этой области, равен нулю:

$$\Pi = \iint\limits_{(\Phi)} (\vec{a} \cdot \vec{n})ds = \iiint\limits_{(G)} div\,\vec{a}\,dv = 0\,.$$

Пусть соленоидальное поле $\vec{a}$ задано в односвязной области. Тогда поток вектора $\vec{a}$ через любую поверхность S, натянутую на заданный контур L, не зависит от вида этой поверхности, а зависит только от контура L.

Возьмем в поле $\vec{a}$ замкнутый контур L и проведем через его точки векторные линии. Образовавшаяся поверхность называется векторной трубкой. Любая другая векторная линия, не проходящая через точки контура L , либо целиком лежит в векторной трубке, либо находится вне ее.

В случае поля скоростей стационарного потока жидкостей векторная трубка – это та часть пространства, которую заполняет при своем перемещении фиксированный объем жидкости.

Интенсивностью векторной трубки называется поток поля через поперечное сечение этой трубки. Для соленоидальных полей имеет место так называемый закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Если соленоидальное поле $\vec{a}$ определено в односвязной области G, то интенсивность векторной трубки постоянна вдоль всей трубки.

В соленоидальном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться внутри поля; они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

§8. Векторный потенциал

Векторный потенциал $\vec{A}(M)$ определяется с точностью до градиента произвольного соленоидального поля $f(M)$.

В самом деле, если $rot\,\vec{A}(M)=\vec{a}(M)$ и $f(M)$ – произвольное скалярное поле, то поскольку $rot\,grad\,f(M)=0$, получаем

$$rot(\vec{A}(M) + grad\,f(M)) = rot\,\vec{A}(M) + rot\,grad\,f(M) = \vec{a}(M).$$

Для того чтобы непрерывно дифференцируемое поле $\vec{a}(M)$ было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело векторный потенциал $\vec{A}(M)$. Необходимость этого условия является следствием разрешимости системы дифференциальных уравнений:

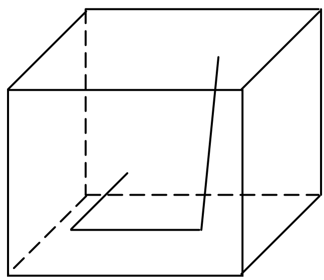
$$P = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; Q = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; R = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad (1)$$

при условии $div\,\vec{a}$ =0 ($\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$).

Покажем, как можно найти векторный потенциал $\vec{A}(M)$. Поскольку в выборе этого вектора имеется значительная доля произвола, примем A_x=0. Тогда система (1) примет вид

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = P; -\frac{\partial A_z}{\partial x} = Q; \frac{\partial A_y}{\partial x} = R. \qquad (2)$$

Таким образом, задача сводиться к определению функции A_y и A_z, удовлетворяющих условиям (2) при условии, что известные функции P, Q, R таковы, что $div\,\vec{a}$ =0. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная, $M(x, y, z)$ – произвольные точки параллелепипеда Ω.



Рассмотрим функции $A_y(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} R(x,y,z)\,dx,$

$$A_z(x,y,z)=-\int_{x_0}^{x} Q(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y} R(x,y,z)dx. \qquad (3)$$

Условие задания поля $\vec{a}$(M) в параллелепипеде с гранями, параллельными плоскостям координат, гарантирует, что пути интегрирования в этих формулах не выйдут за пределы поля. Применяя правила дифференцирования определенного интеграла по параметру и по верхнему пределу и принимая во внимание условие $div\,\vec{a}=0$, получим , что обе функции A_y и A_z, определенные равенствами (3), удовлетворяют и первому из условий (2). Таким образом, $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$, координаты A_y и A_z определяются формулами (3). Для этого вектора $\vec{A}$ выполняется условие $rot\,\vec{A}=\vec{0}$.

Глава 13. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§1. Основы комбинаторики

Факториалом целого положительного числа n (обозначается $n!$) называется произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n = n!$

Основное свойство факториала: $n! = n\cdot(n-1)!$.

Размещениями из n элементов по k называются такие соединения по k элементов, которые отличаются друг от друга самими элементами или их порядком. Число всех размещений из n различных элементов по k (обозначается A_n^k): $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Перестановками из n элементов называются их соединения, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов. Число всех перестановок из n различных элементов (обозначается P_n): $P_n = n!$.

Если среди n элементов $a, b, c,\ldots$ имеются одинаковые (a повторяется α раз, b – β раз, c – γ раз и т.д.), то

$$P_n = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}.$$

Сочетаниями из n элементов по k называются их соединения, отличающиеся друг от друга только самими элементами. Число всех сочетаний из n различных элементов по k (обозначается C_n^k): $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Основное свойство сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Основной закон комбинаторики. Пусть нужно провести k действий, причём первое действие можно провести n_1 способами, второе – n_2 способами, ... , k-е – n_k способами. Тогда все действия можно провести $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

§2. Основные понятия теории вероятностей

Наблюдаемые события можно разделить на три вида: достоверные, невозможные и случайные.

Событие называется достоверным, если оно обязательно произойдет при выполнении данного ряда условий.

Событие называется невозможным, если оно заведомо не произойдет при выполнении данного ряда условий.

Событие называется случайным, если при осуществлении ряда условий оно может либо произойти, либо не произойти.

Испытанием называется осуществление ряда условий.

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называются единственно возможными, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

Очевидно, единственно возможные события являются попарно несовместимыми.

События называются равновозможными, если можно считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другие.

Элементарным исходом называется каждый из возможных результатов испытания.

Полной группой называется совокупность единственно возможных событий испытания.

Противоположными называются два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое обозначают $\overline{A}$.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех элементарных исходов испытания, если все исходы равновозможны (классическое определение вероятности). Формулой это определяется так:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятных событию A; n – число всех возможных элементарных исходов.

§3. Аксиомы вероятности

1. Вероятность достоверного события равна единице.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

4. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A+B) = P(A) + P(B)$.

§4. Относительная частота события

Относительной частотой события называется отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. Таким образом,

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появлений события; n – общее число испытаний, $W(A)$ – относительная частота события.

В тех случаях, когда классическое определение вероятности неприменимо (например, когда число исходов бесконечно), используется статистическое определение. В этом случае за вероятность события принимается относительная частота события.

§5. Сумма несовместных событий

Суммой $A + B$ двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении события А или события В, или обоих этих событий.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема. Вероятность суммы нескольких попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2,..., A_n, образующих полную группу, равна единице:

$P(A_1) + P(A_2) +...+ P(A_n) = 1.$

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

§6. Произведение событий

Произведением двух событий A и B называется событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Условной вероятностью $P(B|A)$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло.

Теорема. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1A_2A_3...A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\cdot...\cdot P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}).$$

Два события A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)\cdot P(B)$.

§7. Сумма совместных событий

Теорема. Вероятность суммы совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

§8. Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2,..., B_n, образующих полную группу и называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+...+P(B_n)P(A|B_n).$$

§9. Формула Байеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2,..., B_n, образующих полную группу. Тогда условная вероятность любого события B_i (i=1,2,...,n) при условии, что событие A уже произошло, вычисляется по **формуле Байеса**:

$$P(B_i\,|\,A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A\,|\,B_i)}{P(B_1)P(A\,|\,B_1)+P(B_2)P(A\,|\,B_2)+\ldots+P(B_n)P(A\,|\,B_n)}.$$

§10. Схема Бернулли

Испытания называются независимыми относительно события A, если при нескольких испытаниях вероятность события A не зависит от исходов других испытаний.

Говорят, что испытания проводятся по схеме Бернулли, если для них выполняются следующие условия:

1) испытания независимы ;

2) количество испытаний известно заранее;

3) в результате испытания может произойти только два исхода: "успех" или "неуспех";

4) вероятность "успеха" в каждом испытании одна и та же.

Вероятность того, что при n испытаниях «успех» осуществится ровно k раз и, следовательно, «неуспех» n-k раз, вычисляется по следующей формуле:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k – число сочетаний из n элементов по k; p – вероятность «успеха»; q – вероятность «неуспеха».

Данная формула называется **формулой Бернулли**.

§11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

В тех случаях, когда использование формулы Бернулли затруднено из-за большого значения n, можно использовать асимптотическую формулу из следующей теоремы.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p ($0 < p < 1$), событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

Здесь $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, соответствующие положительным значениям аргумента x (приложение, табл. 1). Для отрицательных значений аргумента пользуются теми же таблицами, т.к. функция $\varphi(x)$ четна, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При $x>4$ $\varphi(x) \approx 0$.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ – функция Лапласа,

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \; x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Имеются таблицы функции Лапласа (приложение, табл. 2) для положительных значений x $(0 \le x \le 5)$; для значений $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных значений используют эту же таблицу, учитывая, что функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

§12. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступление события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний .

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np-q \le k_0 < np+p,$$

причем:

а) если число $np-q$ – дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0;

б) если число $np-q$ – целое, то существуют два наивероятнейших числа, а именно k_0 и k_0+1;

в) если число np – целое, то наивероятнейшее число $k_0=np$.

§13. Формула Пуассона

При достаточно больших n, если вероятность события мала ($p \le 0{,}1$), формула Лапласа непригодна. В этих случаях (n велико, $p \le 0{,}1$) пользуются **формулой Пуассона**:

Вероятность того, что при очень большом числе испытаний, в каждом из которых вероятность события очень мала, событие наступит ровно k раз, приближенно равна

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Здесь $\lambda = np$. Имеются таблицы для вычисления $P_n(k)$, для различных λ и k (приложение, табл. 3).

Замечание. Формулы Бернулли, Пуассона и формула, следующая из локальной теоремы Лапласа, служат для нахождения вероятности, что в n испытаниях, проводимых по схеме Бернулли, «успех» наступит ровно k раз. Для удобства сведём их в одну таблицу:

Название формулы	Формула	Когда даёт хорошее приближение
Формула Бернулли	$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$	Для всех n и p точная формула
Формула, следующая из локальной теоремы Лапласа	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$, $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	При $p > 0{,}1$ или $np > 9$
Формула Пуассона	$P_n(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $\lambda = np$	$p \le 0{,}1$ и $np \le 9$

§14. Случайная величина

Случайной величиной называется переменная величина, значения которой зависят от случая. Примеры случайных величин: число попаданий в мишень при данном числе выстрелов; число очков, выпадающее при бросании игральной кости.

Случайная величина, возможные значения которой можно перенумеровать, называется дискретной**.** При этом число значений может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называется случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Очевидно, число возможных значений непрерывной случайной величины – бесконечно.

§15. Закон распределения дискретной случайной величины

Для характеристики случайной величины нужно знать совокупность возможных значений этой величины, а также вероятности, с которыми эти значения могут появиться. Эти данные образуют закон распределения случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_i, а вторая – вероятности p_i:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Если множество возможных значений X бесконечно, то ряд $p_1 + p_2 + ... + p_n + ...$ сходится и его сумма равна единице.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан аналитически (в виде формулы)

$$P(X = x_i) = \varphi(x_i)$$

или с помощью функции распределения (см. §20).

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1,\ p_1)$, $M_2(x_2,\ p_2)$,..., $M_n(x_n,\ p_n)$ (x_i – возможные значения X, p_i – соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют многоугольником распределения.

§16. Примеры дискретных распределений

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X – числа появлений «успеха» в n независимых испытаниях (возможные значения случайной величины X - 0,1,2,...,n), в каждом из которых вероятность появления «успеха» равна p; вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений «успеха») вычисляют по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то используют приближенную формулу

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где k – число появлений события в n независимых испытаниях, $\lambda = np$, и говорят, что случайная величина распределена по **закону Пуассона**.

§17. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n.$$

Если дискретная случайная величина принимает бесконечное множество возможных значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i ,$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства сходится абсолютно.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M([X - M(X)]^2).$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

§18. Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 X_2 \ldots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n).$$

Свойство 4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n).$$

Математическое ожидание биномиального распределения равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании: $M(X) = np$.

§19. Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя в квадрат:

$$D(CX) = C^2 \cdot D(X).$$

Свойство 3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n).$$

Дисперсия биномиального распределения равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании: $D(X) = npq$.

§20. Функция распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения называется функция $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства функции распределения:

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Свойство 2. Функция распределения есть неубывающая функция: $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в промежутке $[a; b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x, равна нулю: $P(X = x) = 0$.

Свойство 3. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(a;b)$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

Следствие. Справедливы следующие предельные соотношения: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$.

Свойство 4. Функция распределения непрерывна слева:

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x)=F(x_0).$$

§21. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называется первая производная от функции распределения: $f(x) = F'(x)$.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;\ b)$, определяется равенством

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b).$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Свойства плотности распределения:

Свойство 1. Плотность распределения неотрицательна, т.е. $f(x) \geq 0$.

Свойство 2. Несобственный интеграл от плотности распределения по всей числовой оси равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

§22. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины X. Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$ или равносильным равенством $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Все свойства числовых характеристик, указанные для дискретных случайных величин, сохраняются и для непрерывных величин.

§23. Примеры непрерывных распределений

Равномерным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на интервале $(a;b)$, которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а именно $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(a;\ b)$, равно полусумме концов этого интервала: $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$.

Дисперсия случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(a;\ b)$, определяется равенством $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, где a – математическое ожидание, σ – среднее квадратическое отклонение X.

Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$, вычисляется по формуле

$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\dfrac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{\alpha-a}{\sigma}\right)$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Функцию распределения случайной величины X находим по формуле $F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$,

а вероятность отклонения нормально распределённой случайной величины от её математического ожидания менее чем на δ равна:

$$p\bigl(\bigl(X-a\bigl(< \delta\bigr)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило трёх сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

§24. Закон больших чисел

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины *X* от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа *ε*, не меньше чем $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин X_1, X_2,..., X_n имеет конечные математические ожидания и дисперсии этих величин равномерно ограничены (не превышают постоянного числа *C*), то среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т.е. если ε – любое положительное число, то

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)| < \varepsilon) = 1.$$

Теорема Бернулли (Закон больших чисел). Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то как угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) = 1$, где ε – любое сколь угодно малое положительное число.

§25. Задачи математической статистики

Установление закономерностей, которым подчинены массовые случайные явления, основано на изучении статистических
данных – результатах наблюдений.

Первая задача математической статистики – указать способы сбора и группировки (если данных очень много) статистических сведений.

Вторая задача математической статистики – разработать методы анализа статистических данных в зависимости от целей исследования.

§26. Основные понятия математической статистики

Выборочной совокупностью, или просто выборкой, называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называют число объектов этой совокупности.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, x_k – n_k раз и

$\sum n_i = n$ – объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – вариационным рядом. Числа наблюдений называются частотами, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = W_i$ – относительными частотами.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – число вариант, меньших x; n – объем выборки.

§27. Числовые характеристики статистических распределений

Пусть $x_1, x_2,..., x_n$ – выборка объема n с функцией распределения $F^*(x)$.

Выборочной средней $\overline{x}$ называют среднее арифметическое значение выборочной совокупности.

Если все $x_1, x_2,..., x_n$ выборки объема n различны, то

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n).$$

Если значения $x_1, x_2,..., x_k$ имеют соответственные частоты $n_1, n_2,..., n_k$, причем $n_1 + n_2 +...+ n_k = n$, то

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_n n_k).$$

Выборочной дисперсией D^* называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений от их среднего значения $\overline{x}$.

Если все значения $x_1, x_2,..., x_n$ выборки объема n различны, то

$$D^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right).$$

Если значения $x_1, x_2,..., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2,..., n_k$, причем $n_1 + n_2 +...+ n_k = n$, то

$$D^* = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2\right).$$

Более удобна формула $D^* = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$.

§28. Доверительный интервал

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Доверительным интервалом для параметра θ называется интервал (θ_1, θ_2), содержащий истинное значение θ с заданной вероятностью $p = 1 - \alpha$, т.е.

$$P(\theta_1 < \theta < \theta_2) = 1 - \alpha.$$

Число $p = 1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью (надежностью), а значение α – уровнем значимости.

Интервальной оценкой (с надежностью p) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\overline{x}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ служит доверительный интервал

$$\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}},$$

где n – объем выборки; t – значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$ (см. приложение, табл. 2), при котором $\Phi(t) = \frac{p}{2}$.

Интервальной оценкой (с надежностью p) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного качественного признака X по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

$s \cdot (1–q) < \sigma < s \cdot (1 + q)$ (при $q < 1$),

$0 < \sigma < s \cdot (1 + q)$ (при $q > 1$),

где $s = \sqrt{\frac{n}{n-1} D^*}$ – «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение; q находят по табл. 4 приложения по заданным n и p.

§29. Центральная предельная теорема

Теорема Ляпунова. Если случайные величины в последовательности X_1, X_2,..., X_n,... независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание m_x и дисперсию σ_x^2, то для любого действительного x

$$F(x) \to \Phi(x) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

где $F(x) = P\left[\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} < x\right]$ – функция распределения

случайной величины $\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m_x}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}$.

Примеры решения задач

Задача 1. В корзине 100 фруктов: 10 груш и 90 яблок.

Наугад взяты четыре фрукта. Найти вероятность того, что

а) взято четыре яблока ;

б) взято четыре груши.

Решение. Общее число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний из 100 элементов по четыре, т.е. C_{100}^{4}.

а) Число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию (все взятые наугад четыре фрукта являются яблоками), равно числу сочетаний из 90 элементов по четыре, т.е. C_{90}^{4}.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию к общему числу возможных элементарных исходов:

$$P=\frac{C_{90}^{4}}{C_{100}^{4}}=\frac{\dfrac{90!}{4!\cdot 86!}}{\dfrac{100!}{4!\cdot 96!}}=\frac{87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}\approx 0{,}65\,.$$

б) Число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию (все взятые наугад четыре фрукта – груши), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре груши из десяти имеющихся, т.е. C_{10}^{4}.

Искомая вероятность

$$P=\frac{C_{10}^{4}}{C_{100}^{4}}=\frac{\dfrac{10!}{4!\cdot 6!}}{\dfrac{100!}{4!\cdot 96!}}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}\approx 0{,}00005\,.$$

Задача 2. Из 10 ответов к задачам, помещённым на данной странице, 2 имеют опечатки. Студент решает 5 задач. Какова вероятность того, что в одной из них ответ дан с опечаткой.

Решение. $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

$$n=C_{10}^{5}=\frac{10!}{5!5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252$$

$$m=C_{8}^{4}C_{2}^{1}=\frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{2!}{1!1!}=\frac{2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=140$$

$$P(A)=\frac{140}{252}=\frac{5}{9}.$$

Такие задачи описываются общей схемой. Имеется совокупность из N_1 элементов первого вида и N_2 элементов второго вида. Какова вероятность того, что при выборе совокупности из k элементов она состоит из k_1 элементов первого вида и k_2 элементов второго вида, где
$k = k_1 + k_2$, $k_1 \le N_1$, $k_2 \le N_2$.

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^{k_1}\cdot C_{N_2}^{k_2}}{C_{N_1+N_2}^{k_1+k_2}}$$

Задача 3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе:

а) попадут в цель оба стрелка;

б) попадет хотя бы один.

Решение. Обозначим события: A – попадет в цель первый стрелок, B – попадет в цель второй стрелок.

а) Интересующее нас событие (попадут в цель оба

стрелка) является произведением событий A и B. Так как A и B – независимые события (стрелок попадает или не попадает в цель независимо от меткости другого),
то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Следовательно, $P(AB) = 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}48$.

б) 1-й способ. Интересующее нас событие является суммой событий A и B, поэтому по теореме сложения

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$P(A + B) = 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}48 = 0{,}92$

2-й способ. События C (попадет хотя бы один стрелок) и $\overline{C}$ (ни один из стрелков не попадет) – противоположные, поэтому $P(C) + P(\overline{C}) = 1$. Следовательно,
$P(C) = 1 - P(\overline{C})$.
Событие $\overline{C}$ является произведением событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Таким образом

$P(C) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 1 - 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}92$.

Задача 4. Из колоды в 52 листа наугад вытягивают три карты. Какова вероятность, что все три карты – тузы?

Решение. Интересующее нас событие (все три карты – тузы) является произведением трех событий: A – первая карта туз, B – вторая карта туз, C – третья карта туз. По теореме умножения

$P(ABC) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB)$.

$P(A) = \dfrac{4}{52}$ (число благоприятствующих исходов – число тузов в колоде, общее число элементарных исходов равно числу карт).

$P(B|A) = \dfrac{3}{51}$ (число благоприятствующих исходов – число тузов, оставшихся после совершения события A, т.е. после того, как один туз был вынут из колоды; общее число исходов равно числу карт, оставшихся в колоде после того, как одну карту уже вынули).

Аналогично, $P(C|AB) = \dfrac{2}{50}$.

Следовательно,

$$P(ABC) = \frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50} = \frac{1}{5525} \approx 0{,}00018.$$

Задача 5. Студент знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае вероятность сдать экзамен больше: когда студент подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

Решение. Обозначим события: A – вытягивает выученный билет, подходя первым; B – вытягивает выученный билет, подходя вторым.

$P(A) = \dfrac{10}{25} = 0{,}4$ (число благоприятствующих исходов равно числу выученных билетов; число всех элементарных исходов равно числу билетов).

Событие B может наступить при появлении одного из двух несовместных событий C_1 (первый взятый билет был известен нашему студенту) и C_2 (первый взятый билет был невыученный). По формуле полной вероятности

$P(B) = P(C_1)\cdot P(B|C_1) + P(C_2)\cdot P(B|C_2)$.

$$P(B)=\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24}+\frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24}=\frac{240}{600}=0,4.$$

Так как $P(A) = P(B) = 0,4$, то вероятность одинакова.

Задача 6. В первой урне 4 белых и 6 чёрных шаров, во второй 5 белых и 4 чёрных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар, после чего из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложен чёрный шар, если извлечённый из второй урны шар оказался белым?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что извлечённый шар из второй урны оказался белым, B_1 - из первой урны во вторую переложили белый шар, B_2 - чёрный. B_1 и B_2 - гипотезы.

$$P(B_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\ P(B_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Найдём $P_{B_1}(A)$ и $P_{B_2}(A)$.

Если переложили белый шар, то во второй урне стало 10 шаров, из них 6 белых $P_{B_1}(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, если чёрный, то шаров также 10, но белых 5, тогда $P_{B_2}(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{27}{50}$$

По формуле Байеса:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{27}{50}} = \frac{5}{9}.$$

Задача 7. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Решение. Вероятность рождения мальчика равна p = 0,51. Следовательно, вероятность рождения девочки равна $q = 1 – p = = 1 – 0{,}51 = 0{,}49$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!}(0{,}51)^2 \cdot (0{,}49)^3 \approx 0{,}306.$$

Задача 8. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Решение. По условию задачи $n = 100$; $k = 50$; $p = 0{,}51$; $q = 1 - p = 0{,}49$.

Так как n = 100 – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot 0{,}51}{\sqrt{100 \cdot 0{,}51 \cdot 0{,}49}} \approx -0{,}2.$$

По табл. 1 приложения найдем

$\varphi(-0{,}2) = \varphi(0{,}2) \approx 0{,}3910$ (т.к. функция $\varphi(x)$ – четная).

Искомая вероятность

$$P_{100}(50) \approx \frac{0,3910}{5} \approx 0,0782.$$

Задача 9. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 75 раз и не более 90 раз.

Решение. По условию задачи $n = 100$; $k_1 = 75$; $k_2 = 90$; $p = 0,8$; $q = 1 - p = 0,2$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа, $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Вычислим x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,25.$$

Так как функция Лапласа нечетна, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим

$P_{100}(75 \le k \le 90) = \Phi(2,25) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,25) + \Phi(1,25)$.

По табл. 2 приложения найдем:

$\Phi(2,25) = 0,4938$; $\Phi(1,25) = 0,3944$.

Искомая вероятность

$P_{100}(75 \le k \le 90) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882$.

Задача 10. Найти наиболее вероятное число правильно набитых перфораторщицей перфокарт среди 19 перфокарт, если вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,1.

Решение. По условию задачи $n = 19$; $p = 0{,}9$; $q = 0{,}1$. Найдем наиболее вероятное число правильно набитых перфокарт из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 < np + p.$$

Подставляя данные задачи, получим

$19 \cdot 0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 < 19 \cdot 0{,}9 + 0{,}9$, или $17 \le k_0 < 18$.

Так как $np - q = 17$ – целое число, то наиболее вероятных чисел два (см. §12): $k_0 = 17$ и $k_0 + 1 = 18$.

Задача 11. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Решение. Так как вероятность $p = 0{,}004$ очень мала, применение локальной теоремы Лапласа приведет к значительному отклонению от точного значения $P_n(k)$. Поэтому при $p \le 0{,}1$ применяют формулу Пуассона (см. §13):

$P_n(k) \approx \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$.

По условию задачи $n = 1000$; $k = 5$; $p = 0{,}004$.

Тогда $\lambda = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$.

Подставляя данные задачи, получим

$$P_{1000}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0{,}1562 .$$

Задача 12. В тёмной комнате 7 красных кубиков и 8 синих, не отличаемых друг от друга на ощупь. Мальчик вынес три кубика. X - случайная величина числа красных кубиков среди вынесенных. Найти закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Построить график функции распределения.

Решение. Возможные значения случайной величины X: 0,1,2,3. Пусть им соответствуют вероятности P_0, P_1, P_2, P_3. Найдём их аналогично тому, как искали в задаче 2:

$$P_0 = \frac{C_7^0 \cdot C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{1 \cdot \dfrac{8!}{3!5!}}{\dfrac{15!}{3!5!}} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{13 \cdot 14 \cdot 15} = \frac{56}{455},$$

$$P_1 = \frac{C_7^1 \cdot C_8^2}{C_{15}^3} = \frac{7 \cdot \dfrac{8!}{2!6!}}{455} = \frac{196}{455},$$

$$P_2 = \frac{C_7^2 \cdot C_8^1}{C_{15}^3} = \frac{8 \cdot \dfrac{7!}{2!5!}}{455} = \frac{168}{455},$$

$$P_3 = \frac{C_7^3 \cdot C_8^0}{C_{15}^3} = \frac{1 \cdot \dfrac{7!}{3!4!}}{455} = \frac{35}{455}.$$

Таким образом, закон распределения имеет вид:

X	0	1	2	3
p	$\frac{56}{455}$	$\frac{196}{455}$	$\frac{168}{455}$	$\frac{3}{455}$

Найдём $M(X)$:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4 =$$

$$= 0 \cdot \frac{56}{455} + 1 \cdot \frac{196}{455} + \frac{2 \cdot 168}{455} + \frac{3 \cdot 35}{455} = \frac{637}{455} = 1{,}4.$$

Дисперсию будем искать по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Составим закон распределения для X^2.

X^2	0	1	4	9
p	$\frac{56}{455}$	$\frac{196}{455}$	$\frac{168}{455}$	$\frac{3}{455}$

$$M(X^2) = \frac{196}{455} + \frac{4 \cdot 168}{455} + \frac{9 \cdot 35}{455} = 2,6.$$

$D(X) = 2,6 - (1,4)^2 = 0,64.$

Среднее квадратическое отклонение:

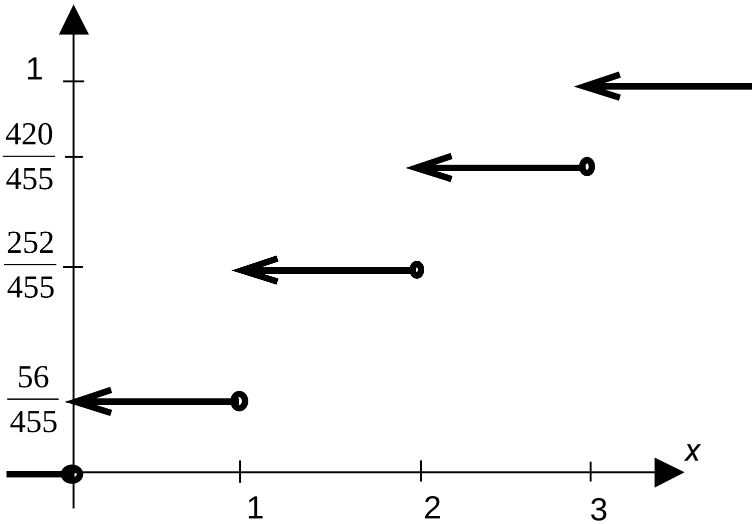
$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

По определению функцию распределения находим по формуле $F(x) = P(X < x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{56}{455}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{56+196}{455}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{252+168}{455}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{56}{455}, & 0 < x \le 1 \\ \frac{252}{455}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{420}{455}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Построим график функции распределения:



Задача 13. Дана функция плотности распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ A(x+2), & 0<x<2.\\ 0, & x\ge 2\end{cases}$$

Найти: 1) параметр A; 2) построить графики плотности и функции распределения; 3) $P(1 < x < 4)$; 4) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; 5) верятность P, что отклонение случайной величины от $M(X)$ не более 1.

Решение. Так как $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, получаем

$\int_0^2 A(x+2)dx=1$, так как

$$\int_0^2 A(x+2)d(x+2)=A\frac{(x+2)^2}{2}\Bigg|_0^2=A(8-2)=6A,$$ тогда

$$6A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{6}.$$

Итак, $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{6}(x+2), & 0<x<2. \\ 0, & x\ge 2 \end{cases}$

Найдём $F(x)$, функцию распределения по формуле $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$

если $x\le 0$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt=0,$

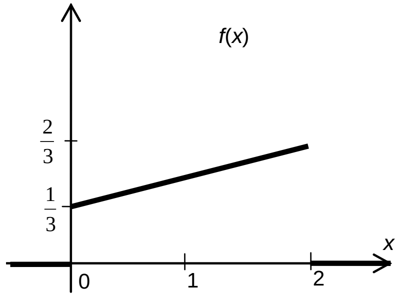
если $0<x<2$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{6}(t+2)dt=\frac{x^2}{12}+\frac{x}{3},$

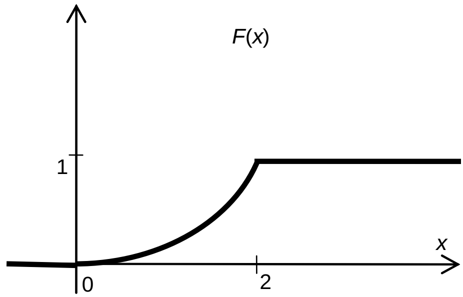
если $2\le x<\infty$, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{6}(x+2)dx+\int\limits_{2}^{x} 0dt=$

$$=\left(\frac{x^2}{12}+\frac{x}{3}\right)_0^2=\frac{4}{12}+\frac{2}{3}=1.$$

Итак, $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{x^2}{12}+\frac{x}{3}, & 0<x<2. \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$

Построим оба графика





Найдём $P(1 < x < 4)$.

Так как $P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$,

$$F(1) = \left.\frac{x^2}{12} + \frac{x}{3}\right|_{x=1} = \frac{5}{12}, \ F(4) = 1,$$

$$P(1 < x < 4) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}.$$

Найдём $M(X)$ по формуле $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

$$M(X) = \frac{1}{6}\int\limits_0^2 x(x+2)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{9}.$$

Дисперсия вычисляется по формуле

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

$$M(X^2) = \frac{1}{6}\int_0^2 x^2(x+2)dx = \frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right)_0^2 = \frac{14}{9},$$

$$D(X) = \frac{14}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{26}{81}.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{26}{81}} \approx 0,57.$$

Найдём $P\left(\left|X - M(X)\right| < 1\right)$. Так как, $\left|X - M(X)\right| < 1$, следует $M(X) - 1 < X < M(X) + 1$ в нашей задаче $\frac{10}{9} - 1 < X < \frac{10}{9} + 1$ или $\frac{1}{9} < X < \frac{19}{9}$, то необходимо найти

$$P\left(\frac{1}{9} < X < \frac{19}{9}\right) = F\left(\frac{19}{9}\right) - F\left(\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{81 \cdot 12} + \frac{1}{27}\right) = \frac{935}{972} \approx 0,962.$$

Задача 14. Масса вагона - случайная величина, распределённая по нормальному закону с математическим ожиданием 65 т и средним квадратичным отклонением 0,9 т. Найти вероятность того, что вагон имеет массу не более 67 т и не менее 64 т. По правилу трёх сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемой массы.

Решение. Для нормально распределённой случайной величины $P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right) =$

$= \Phi\left(\dfrac{67-65}{0,9}\right) - \Phi\left(\dfrac{64-65}{0,9}\right) = \Phi(2,22) + \Phi(1,11) =$

$= 0,4868 + 0,3665 = 0,8533.$

По правилу трёх сигм наименьшая граница $a - 3\sigma$, наибольшая граница $a + 3\sigma$. Таким образом, $65 \pm 3 \cdot 0,9 = 65 \pm 2,7$.

Наименьшая граница 62,3 т, наибольшая 67,7 т.

Приложение

Таблица 1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

Окончание табл.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблица 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,19	0,0753	0,38	0,1480	0,57	0,2157
0,01	0,0040	0,20	0,0793	0,39	0,1517	0,58	0,2190
0,02	0,0080	0,21	0,0832	0,40	0,1554	0,59	0,2224
0,03	0,0120	0,22	0,0871	0,41	0,1591	0,60	0,2257
0,04	0,0160	0,23	0,0910	0,42	0,1628	0,61	0,2291
0,05	0,0199	0,24	0,0948	0,43	0,1664	0,62	0,2324
0,06	0,0239	0,25	0,0987	0,44	0,1700	0,63	0,2357
0,07	0,0279	0,26	0,1026	0,45	0,1736	0,64	0,2389
0,08	0,0319	0,27	0,1064	0,46	0,1772	0,65	0,2422
0,09	0,0359	0,28	0,1103	0,47	0,1808	0,66	0,2454
0,10	0,0398	0,29	0,1141	0,48	0,1844	0,67	0,2486
0,11	0,0438	0,30	0,1179	0,49	0,1879	0,68	0,2517
0,12	0,0478	0,31	0,1217	0,50	0,1915	0,69	0,2549
0,13	0,0517	0,32	0,1255	0,51	0,1950	0,70	0,2580
0,14	0,0557	0,33	0,1293	0,52	0,1985	0,71	0,2611
0,15	0,0596	0,34	0,1331	0,53	0,2019	0,72	0,2642
0,16	0,0636	0,35	0,1368	0,54	0,2054	0,73	0,2673
0,17	0,0675	0,36	0,1406	0,55	0,2088	0,74	0,2703
0,18	0,0714	0,37	0,1443	0,56	0,2123	0,75	0,2734

Продолжение табл. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	Φ(x)
0,76	0,2764	1,14	0,3729	1,52	0,4357	1,90	0,4713
0,77	0,2794	1,15	0,3749	1,53	0,4370	1,91	0,4719
0,78	0,2823	1,16	0,3770	1,54	0,4382	1,92	0,4726
0,79	0,2852	1,17	0,3790	1,55	0,4394	1,93	0,4732
0,80	0,2881	1,18	0,3810	1,56	0,4406	1,94	0,4738
0,81	0,2910	1,19	0,3830	1,57	0,4418	1,95	0,4744
0,82	0,2939	1,20	0,3849	1,58	0,4429	1,96	0,4750
0,83	0,2967	1,21	0,3869	1,59	0,4441	1,97	0,4756
0,84	0,2995	1,22	0,3888	1,60	0,4452	1,98	0,4761
0,85	0,3023	1,23	0,3907	1,61	0,4463	1,99	0,4767
0,86	0,3051	1,24	0,3925	1,62	0,4474	2,00	0,4772
0,87	0,3078	1,25	0,3944	1,63	0,4484	2,02	0,4783
0,88	0,3106	1,26	0,3962	1,64	0,4495	2,04	0,4793
0,89	0,3133	1,27	0,3980	1,65	0,4505	2,06	0,4803
0,90	0,3159	1,28	0,3997	1,66	0,4515	2,08	0,4812
0,91	0,3186	1,29	0,4015	1,67	0,4525	2,10	0,4821
0,92	0,3212	1,30	0,4032	1,68	0,4535	2,12	0,4830
0,93	0,3238	1,31	0,4049	1,69	0,4545	2,14	0,4838
0,94	0,3264	1,32	0,4066	1,70	0,4554	2,16	0,4846
0,95	0,3289	1,33	0,4082	1,71	0,4564	2,18	0,4854
0,96	0,3315	1,34	0,4099	1,72	0,4573	2,20	0,4861
0,97	0,3340	1,35	0,4115	1,73	0,4582	2,22	0,4868
0,98	0,3365	1,36	0,4131	1,74	0,4591	2,24	0,4875
0,99	0,3389	1,37	0,4147	1,75	0,4599	2,26	0,4881
1,00	0,3413	1,38	0,4162	1,76	0,4608	2,28	0,4887
1,01	0,3438	1,39	0,4177	1,77	0,4616	2,30	0,4893
0,02	0,3461	1,40	0,4192	1,78	0,4625	2,32	0,4898
1,03	0,3485	1,41	0,4207	1,79	0,4633	2,34	0,4904
1,04	0,3508	1,42	0,4222	1,80	0,4641	2,36	0,4909
1,05	0,3531	1,43	0,4236	1,81	0,4649	2,38	0,4913
1,06	0,3554	1,44	0,4251	1,82	0,4656	2,40	0,4918
1,07	0,3577	1,45	0,4265	1,83	0,4664	2,42	0,4922
1,08	0,3599	1,46	0,4279	1,84	0,4671	2,44	0,4927
1,09	0,3621	1,47	0,4292	1,85	0,4678	2,46	0,4931
1,10	0,3643	1,48	0,4306	1,86	0,4686	2,48	0,4934
1,11	0,3665	1,49	0,4319	1,87	0,4693	2,50	0,4938
1,12	0,3686	1,50	0,4332	1,88	0,4699	2,52	0,4941
1,13	0,3708	1,51	0,4345	1,89	0,4706	2,54	0,4945

Окончание табл. 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,56	0,4948	2,72	0,4967	2,88	0,4980	3,20	0,49931
2,58	0,4951	2,74	0,4969	2,90	0,4981	3,40	0,49966
2,60	0,4953	2,76	0,4971	2,92	0,4982	3,60	0,499841
2,62	0,4956	2,78	0,4973	2,94	0,4984	3,80	0,499928
2,64	0,4959	2,80	0,4974	2,96	0,4985	4,00	0,499968
2,66	0,4961	2,82	0,4976	2,98	0,4986	4,50	0,499997
2,68	0,4963	2,84	0,4977	3,00	0,49865	5,00	0,499997
2,70	0,4965	2,86	0,4979				

Таблица 3

Значения функции $P_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653
1	09048	16375	22225	26813	30327
2	00452	01638	03334	05363	07582
3	00015	00109	00333	00715	01264
4		00006	00025	00072	00158
5			00002	00006	00016
6					00001

m \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657
1	32929	34761	35946	36591
2	09879	12166	14379	16466
3	01976	02839	03834	04940
4	00296	00497	00767	01112
5	00036	00070	00123	00200
6	00004	00008	00016	00030
7		00001	00002	00004

m \ λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674
1	36788	27067	14936	07326	03369
2	18394	27067	22404	14653	08422
3	06131	18045	22404	19537	14037
4	01533	09022	16803	19537	17547
5	00307	03609	10082	15629	17547
6	00051	01203	05041	10419	14622
7	00007	00344	02160	05954	10445
8	00001	00086	00810	02977	06528
9		00019	00270	01323	03627
10		00004	00081	00529	01813
11		00001	00022	00193	00824
12			00006	00064	00343
13			00001	00020	00132
14				00006	00047
15				00002	00016
16					00005
17					00001

Таблица 4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

	γ				γ		
n	0,95	0,99	0,999	n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Литература

Рудык Б.М. Курс высшей математики для экономистов: Учебник/Рудык Б.М., Бобрик Г.И., Гринцевичюс Р.К; под ред. Р.В.Сагитова - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 647 с.

Кастрица О.А. Высшая математика для экономистов: Учебное пособие/О.А.Кастрица, 4-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, Нов. знание, 2015. - 491 с.

Высшая математика: Учебник / В.С. Шипачев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. - 479 с.

Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,Т.1, - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. М.: Наука,Т.2 , - М.: Интеграл – Пресс, 2006

Шипачев В.С. Начала высшей математики. [Текст]: учебное пособие. / В.С. Шипачев – изд. 5-е, стереотипное. Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 383 с.: ил. (ЭБС)

Содержание

Составители:

Грунина Мария Викторовна
Бильданов Ринат Талгатович
Бабин Владислав Николаевич
Бурков Сергей Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие

Второе издание, стереотипное

Редактор Н.К. Крупина

Подписано к печати «25» декабря 2017 г.Формат 60×84 1/16.
Объем 18,8 уч.-изд.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1940