НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ЗАОЧНОГО ОБРАЗОВАНИЯ И ПОВЫШЕНИЯ
КВАЛИФИКАЦИИ

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания
и задания для контрольных работ

Новосибирск 2019

Составители: В.И. Налимова, С.Н. Шумарева, Чащин О.Н..

Математика и математическая статистика: Методические указания и задания для контрольных работ/ Новосиб. гос. аграр. ун-т: Сост. В.И. Налимова, С.Н. Шумарева. -Новосибирск, 2019.

Методические указания и задания для контрольных работ предназначены для студентов заочной формы обучения по направлениям подготовки: **35.03.04** Агрономия, **35.03.10** Ландшафтная архитектура.

Утверждены и рекомендованы к изданию методической комиссией Института заочного образования и повышения квалификации.

Новосибирский государственный аграрный университет, 2019

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения.

При выполнении контрольных работ студент должен руководствоваться следующими указаниями:

1. Каждая работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, специальность, номер контрольной работы.
2. Контрольные задачи следует располагать в порядке номеров, указанных в заданиях. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать ее условие. Решение задач следует излагать подробно.
3. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3 см. для замечаний преподавателя.
4. Контрольные работы должны выполняться самостоятельно. Если преподаватель установит несамостоятельное выполнение работы, то она не будет зачтена.
5. Получив прорецензированную работу (как зачтенную, так и незачтенную), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты. В случае незачета по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования преподавателя, и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.
6. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра (номер зачетки).

Таблицы №1, №2

Таблица 1

№ варианта (последняя цифра зачётной книжки)	Номера задач для контрольной работы (если предпоследняя цифра зачётной книжки нечётная) (1,3,5,7,9)						
1	1	61	81	101	121	141	161	181
2	2	62	82	102	122	142	162	182
3	3	63	83	103	123	143	163	183
4	4	64	84	104	124	144	164	184
5	5	65	85	105	125	145	165	185
6	6	66	86	106	126	146	166	186
7	7	67	87	107	127	147	167	187
8	8	68	88	108	128	148	168	188
9	9	69	89	109	129	149	169	189
0	10	70	90	110	130	150	170	190

Таблица 2

№ варианта (последняя цифра зачётной книжки)	Номера задач для контрольной работы (если предпоследняя цифра зачётной книжки чётная) (0,2,4,6,8)						
1	11	71	91	111	131	151	171	191
2	12	72	92	112	132	152	172	192
3	13	73	93	113	133	153	173	193
4	14	74	94	114	134	154	174	194
5	15	75	95	115	135	155	175	195
6	16	76	96	116	136	156	176	196
7	17	77	97	117	137	157	177	197
8	18	78	98	118	138	158	178	198
9	19	79	99	119	139	159	179	199
0	20	80	100	120	140	160	180	200

Тема 1. Аналитическая геометрия на плоскости

Для решения задач по аналитической геометрии нам понадобятся следующие формулы:

1. Расстояние d между точками A (x_1,y_1), и B (x_2, y_2) на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \ldots(1)$$

2. Деление отрезка в данном отношении.

Даны точки $A(x_1, y_1)$, и $B(x_2, y_2)$. Координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$, определяется по формулам: $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$; $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$

В частности, при делении отрезка пополам (λ=1)

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (2)$$

3. Все виды уравнений прямой.

а) уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b \ldots (3,а),$$

где k - угловой коэффициент,
b – отрезок на оси Oy,
прямая не параллельна оси Oy.

б) уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении:

$$y - y_o = k(x - x_o) \ldots (3,б),$$

где k - угловой коэффициент,
(x_o, y_o) - координаты точки, лежащей на прямой,
прямая не параллельна оси Oy.

в) уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \ldots(3,в)$$

(x_1, y_1), (x_2, y_2) - координаты данных точек,
прямая не параллельна осям Ох и Оу;
г) уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3,г)$$

a - отрезок на Ох, b - отрезок на Оу,
прямая не проходит через точку 0 (0,0);
д) уравнение прямой, параллельной оси Оу:

$$x = a \ldots(3,д),$$

где a - отрезок на Ох;

е) уравнение прямой, параллельной оси Оу:

$$y = b \ldots(3, е),$$

где b - отрезок на Оу;
ж) общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0 \ldots(3,ж)$$

А и В не равны нулю одновременно.
4. Угол φ, отсчитанный против часовой стрелки от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2 x + b_2$ определяется формулой:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \ldots(4)$$

а) Условие параллельности: $k_1 = k_2$.

б) Условие перпендикулярности: $k_2 = \dfrac{-1}{k_1}$

5. Чтобы найти точку пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, нужно решить совместно их уравнения.

Задача 1: Даны координаты вершин треугольника ABC: A(4,3); B(16,-6); C(20,16). Найти: 1) длину стороны AB; 2) уравнения сторон AB и BC и их угловые коэффициенты; 3) угол В в радианах с точностью до двух знаков; 4) уравнение CD и ее длину; 5) уравнение медианы AE; 6) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB.

Решение: 1) Применяя (1), находим длину стороны

$$AB = \left[\sqrt{(16-4)^2+(-6-3)^2}\right] = \sqrt{144+81} = \sqrt{255} = 15$$

2) Подставляя в (3,в) координаты точек А и В, получим уравнение стороны АВ:

$$\frac{y-3}{-6-3} = \frac{x-4}{16-4}; \quad \frac{y-3}{-9} = \frac{x-4}{12}; \quad \frac{y-4}{-3} = \frac{x-4}{4}$$

4y-12=-3x+12; 3x+4y-24=0 (АВ)

Решая последнее уравнение относительно у, получим уравнение стороны АВ как уравнение прямой с угловым коэффициентом: 4у =-3х+24 , $y = \frac{-3}{4}$ x+6, : k_{AB}=-3/4

Подставив в (3,в) координаты точек В и С, получим уравнение прямой ВС:

$$\frac{y+6}{16+6} = \frac{x-16}{20-16}; \quad \frac{y+6}{22} = \frac{x-16}{4}; \quad \frac{y+6}{11} = \frac{x-16}{2}$$

11x-2y-188=0 (ВС) или y= $\frac{11}{2}$ x-94, откуда k_{BC}=11/2 , найдены: k_{AB}=-3/4; k_{BC} =11/2.

3) Искомый угол В образован прямыми АВ и ВС, угловые коэффициенты которых

$$tgB = \frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{BC}} = \frac{\frac{-3}{4}-\frac{11}{2}}{1+\left(\frac{-3}{4}\right)\cdot\frac{11}{2}} = \frac{\frac{-25}{4}}{\frac{25}{8}} = 2$$

Применяя (4), получим В=63°26 или В-1,11рад.

4) Высота *CD* перпендикулярна стороне АВ.

Чтобы найти угловой коэффициент высоты CD, воспользуемся условием перпендикулярности прямых. Так как k_{AB}=-3/4, то k_{CD}= -1/кАВ=4/3.

Подставив в (3,б) координаты точки С и найденный угловой коэффициент 4/3 высоты, получим

(у-16)=(4/3)(х-20); 3у-48=4х-80; 4х-3у-32=0 (CD).

Чтобы найти длину высоты CD, определим координаты точки D — точки пересечения прямых АВ и CD.

Решая систему $\begin{cases} 3x+4y-24=0 \\ 4x-3y-32=0 \end{cases}$, находим х=8, у=0, т.е. D(8,0).

По формуле (1) находим длину CD: CD = $\sqrt{(20-8)^2+(16-0)^2}$ = 20

5) Чтобы найти уравнение медианы АЕ, определим координаты точки Е,

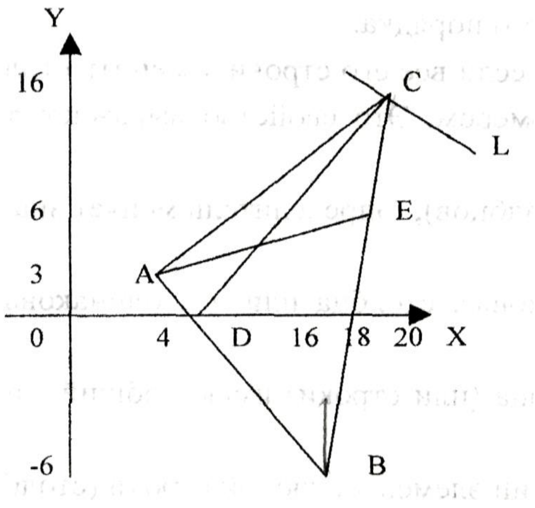
которая является серединой отрезка ВС. Воспользуемся формулами деления отрезка пополам (2). Следовательно:

$$x_E=\frac{16+20}{2}=18;\quad y_E=\frac{-6+16}{2}=5;\quad E(18,5)$$

Подставив (3,в) координаты точек А и Е, находим уравнение медианы:

$$\frac{y-3}{5-3}=\frac{x-4}{18-4};\quad \frac{y-3}{2}=\frac{x-4}{14};\quad x-7y+17=0\ (AE)$$

6) Так как искомая прямая параллельна стороне АВ, то её угловой коэффициент равен угловому коэффициенту прямой АВ. Подставив в (3,6) координаты точки С и угловой коэффициент k=-3/4, получим y-16=(-3/4)(x-20), 4y-64=-3x+60, 3x+4y-124=0 (CL)



Тема 2. Производная функции

<u>Производной функции</u> y = f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

$$f^{I}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\Delta y = f(x) - f(x_0)$ - приращение функции, $\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента.

Обозначается производная: $y^I = f^{I}(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Символ dy называют дифференциалом функции и вычисляют по формуле: $dy = y^I \bullet dx$ или $dy = f^{I}(x)\,dx$

Операция нахождения производной называется дифференцированием функции.

Основные правила дифференцирования.

Пусть $U = U(x)$ и $V = V(x)$ — функции, дифференцируемые в некоторой точке x_0,

C = const (постоянная величина), тогда:

1) $C^I = 0$
2) $(U \pm V)^I= U^I \pm V^I$
3) $(U \cdot V) = U^I \cdot V + V^I \cdot U$
4) $(CU)^I = CU^I$
5) $\left(\dfrac{U}{V}\right)^I = \dfrac{U^I\cdot V - V^I\cdot U}{V^2}$

Таблица производных 1:

1. $(x^{\alpha})^I = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ $x^I = 1$ $(\sqrt{x})^I = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ $\left(\dfrac{1}{x}\right)^I = \dfrac{-1}{x^2}$	7. $(\cos x)^I = -\sin x$ 8. $(tgx)^I = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ 9. $(ctgx)^I = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
2. $(a^x)^I = a^x \cdot \ln a$ 3. $(e^x)^I = e^x$	10. $(\arcsin x)^I = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $(\log_a x)^I = \dfrac{1}{x\cdot\ln a}$	11. $(\arccos x)^I = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

6. $(\sin x)^I = \cos x$	11. $(\arccos x)^I = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\mathrm{arctg}x)^I = \dfrac{1}{1+x^2}$	13. $(\mathrm{arcctg}x)^I = \dfrac{-1}{1+x^2}$

<u>Производная сложной функции</u>

Пусть y-сложная функция, т.е. y = f(u), u = g(x), или y = f (g(x)) (f - внешняя функция, g - внутренняя функция).

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции в своей точке на производную внутренней функции.

Для вычисления производной сложной функции применяют таблицу 2.

<u>Таблица производных (сложной функции) 2</u>

1. $(u^\alpha)^I = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u^I$ 2. $(a^u)^I = a^u \cdot \ln a \cdot u^I$	9. $(\mathrm{ctg}\, u)^I = \dfrac{-u^I}{\sin^2 u}$
3. $(e^u)^I = e^u \cdot u^I$	
4. $(\log_a \cdot u)^I = \dfrac{u^I}{u \cdot \ln a}$	10. $(\arcsin u)^I = \dfrac{u^I}{\sqrt{1-u^2}}$
5. $(\ln u)^I = \dfrac{u^I}{u}$	11. $(\mathrm{arcos}\ u)^I = \dfrac{-u^I}{\sqrt{1-u^2}}$
6. $(\sin u)^I = \cos u \cdot u^I$ 7. $(\cos u)^I = -\sin u \cdot u^I$	12. $(\mathrm{arctg}u)^I = \dfrac{u^I}{1+u^2}$
8. $(\mathrm{tg}u)^I = \dfrac{u^I}{\cos^2 u}$	13. $(\mathrm{arcctg}u)^I = \dfrac{-u^I}{1+u^2}$

Тема 3. Интеграл

Функция F(x) называется <u>первообразной</u> для функции f(x), если $F^I(x) = f(x)$. Всякая непрерывная функция f(x) имеет бесконечное множество первообразных функций, которые отличаются друг от друга на постоянную. <u>Неопределенным интегралом</u> от функции f(x) называется совокупность всех ее первообразных.

Обозначают: $\int f(x)dx$ = F(x)+c

18

<u>Свойства неопределенного интеграла.</u>

1. $\left(\int f(x)dx\right)^{I}$ = f(x) или d$\left(\int f(x)dx\right)$ = f(x) dx
2. $\int F^{I}(x)dx =$ F(x)+c или $\int dF(x) = F(x) + c$
3. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

4. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, т.е. неопределенный интеграл от алгебраической суммы равен сумме интегралов.

<u>Таблица основных интегралов</u>

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ (α≠-1) $\int 1dx = x + c$	
2. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	3. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c$
4. $\int e^{x}dx = e^{x} + c$	5. $\int \sin xdx = -\cos x + c$
6. $\int \cos xdx = \sin x + c$	7. $\int \dfrac{1}{\cos^{2} x}dx = tgx + c$
8. $\int \dfrac{1}{\sin^{2} x}dx = -ctgx + c$	
9. $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^{2}+x^{2}}}dx = \arcsin\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$ $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx = \arcsin x + c$	
10. $\int \dfrac{1}{a^{2}+x^{2}}dx = \dfrac{1}{a} \cdot arctg\left(\dfrac{x}{a}\right) + c$ $\int \dfrac{1}{1+x^{2}}dx = arctgx + c$	
11. $\left.\begin{aligned} &\int \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^{2}+a^{2}}\right\rvert + c \\ &\int \dfrac{1}{\sqrt{x^{2}-a^{2}}}dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^{2}-a^{2}}\right\rvert + c \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ (формула «длинного» логарифма)	

12. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2a}\cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \Rightarrow$ $\Rightarrow$ (формула «высокого» логарифма)

Найти интеграл:
Воспользуемся свойствами 3 и 4:

а) $\int\left(6x^3 - \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{2x}\right)dx = 6\cdot\int x^3dx - \int x^{\frac{1}{2}}dx + 5\int x^{\frac{-2}{3}}dx +$

$+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x}dx =$ воспользуемся табличными интервалами 1и 2:

$$= 6\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5\frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{\frac{-2}{3}+1} + \frac{1}{2}\ln|x| + c = \frac{3}{2}x^4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 15\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}\ln|x| + c$$

Тема 4. Теория вероятностей

1. Основы комбинаторики

Факториалом целого положительного числа n (обозначается n!) называется произведение 1·2·3-... - n = n! По определению 0!=1.

Основной закон комбинаторики. Пусть нужно произвести k действий, причем первое действие можно произвести n_1 способами, второе – n_2 способами, ... k-ое - n_k способами. Тогда все действия можно произвести $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Перестановкой из n элементов называется набор из n элементов, расположенных в определенном порядке. Число всех перестановок из n элементов равно: $P_n = n!$

Размещением из n элементов по k элементов называется набор из к элементов, выбранных из данных n элементов в определенном порядке, т.е. два различных размещения отличаются либо составом элементов, либо (при одинаковом составе) порядком элементов.

Число всех размещений из n элементов по к элементов равно:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Сочетанием из n элементов по k элементов называется набор из k элементов, выбранных из данных n элементов в произвольном порядке, т.е.

два различных сочетания отличаются только составом элементов.

Число всех сочетаний из n элементов по k элементов равно:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Основное свойство сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$

2. Основные понятия теории вероятностей

Испытанием называется осуществление ряда условий, при которых производится наблюдение.

Событие - это результат испытания.

Элементарными событиями (исходами) называются возможные, исключающие друг друга, результаты одного испытания.

Событие называется достоверным, если при испытании оно обязательно произойдет.

Событие называется невозможным, если при испытании оно не может произойти.

Событие называется случайным, если при испытании оно может либо произойти, либо не произойти.

События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

События называются единственно возможными, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием. Единственно возможные события попарно несовместны.

События называются равновозможными, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Полной группой называется совокупность единственно возможных событий испытания.

Событие $\overline{A}$, которое состоит в том, что событие *A* не происходит, называется противоположным событию А. Очевидно, события *A* и $\overline{A}$ образуют полную группу событий.

3. Вероятность события. Свойства вероятности

Вероятностью события *A* называется отношение числа m благоприятных исходов к общему числу n всех элементарных равновозможных исходов. Вероятность события А обозначается P(A).

Тогда, $$P(A) = \frac{m}{n}$$

1) P(A) = 0, если A - событие невозможное;
2) P(B) = 1, если B - событие достоверное;

3) $0 < P(C) < 1$, если C - случайное событие;
4) $P(A+B) = P(A)+ P(B)$, если A и B несовместные события;
5) $P(A) = 1 - P(A)$

4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Суммой двух событий A и B называется событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из них: $C = A + B$.

Произведением событий A и B называется событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном появлении этих событий.

Условной вероятностью $P(B/A)$ $((P_A(B))$ называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже произошло. События A и B называются независимыми, если вероятность события A не зависит от того, произошло или не произошло событие B, т.е. если $P(A/B) = P(A)$ (условная вероятность равна безусловной).

Теорема 1. Вероятность произведения событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого.

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Следствие 1.1. Если события независимы, то вероятность их произведения равна произведению их вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A).$$

Теорема 2. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме их вероятностей без вероятности их произведения.

$$P(A + B)= P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Следствие 2.1. Сумма вероятностей событий A_1, A_2 … A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)=1.$$

Следствие 2.2 (Формула полной вероятности).

Вероятность события A, которое может наступить при условии появления одного из попарно несовместных событий B_1, B_2 ... B_n, образующих полную группу и называемых гипотезами, равна сумме произведений вероятностей каждого из них на соответствующую условную вероятность события A, т.е.:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \bullet P(A/B_2) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A/B_n).$$

Пример 1.

Вероятность заморозков в мае в некоторой местности 0,3.
Найти вероятность, что три дня подряд будут заморозки.

Решение.

Обозначим через B событие, состоящее в появлении трех дней с заморозками. Событие A = {день с заморозками} $P(A) = 0,3$, $B=A \cdot A \cdot A$, тогда $P(B) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) = 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,027$.

Схема Бернулли

Схемой Бернулли или схемой повторных независимых испытаний с двумя исходами: "успех" или "неуспех" называется последовательность n независимых испытаний, в каждом из которых "успех" наступает с одной и той же вероятностью p≠0 и 1.

Вероятность того, что при n испытаниях «успех» наступит ровно k раз, вычисляется по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,

где n - число испытаний;

k - число "успехов";

p - вероятность "успеха" в одном испытании;

q = 1 - p - вероятность "неуспеха";

$C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)}$ - число сочетании из n элементов по k.

Пример 2.

Вероятность заболевания животного во время эпидемии 0,2. Найти вероятность, что из 6 животных 2 заболеют.

Решение.

Число животных n = 6, число "успехов" k = 2, p = 0,2, q =1 — 0,2 = 0,8.

$$P_6(2) = C_6^{\,2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 = \frac{6!}{2! \cdot \_6-2)!} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^4 =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}8^4 = \frac{5\cdot 6}{2} \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}4 = 0{,}25$$

При больших n использование формулы Бернулли затруднительно, поэтому, в этих случаях применяют приближенные формулы, которые следуют из локальной теоремы Лапласа и из теоремы Пуассона.

Выбор формулы для решения задачи на схему Бернулли поможет сделать следующая таблица:

Название формулы	Формула	Когда даст хорошее решение.
Формула Бернулли.	$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	Для всех n и p
Формула, следующая из локальной теоремы Лапласа.	$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npg}}\cdot\varphi(x)$ $x=\frac{k-np}{\sqrt{npg}};\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{x^2}{2}}$	При p>0,1 или np>9.
Формула, следующая из теоремы Пуассона.	$P_n(k)\approx\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!};\lambda=np$	P≤0,1; np<9, n>10.

Имеются таблицы, в которых помещены значения функции

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{x^2}{2}}$$

Свойства функции φ(x):
1)φ(-x) = φ(x);
2) при x > 4   φ(x) ≈ 0.

Пример 3.

Допустим, укореняют 15 черенков роз. Приживаемость 80%. Найти вероятность того, что из 15 черенков укоренится ровно 12.

Решение,.

n = 15; k = 12; p = 0,8; q = 1 - 0,8 = 0,2.

Имеем npq = 15 · 0,8 · 0,4 = 2,4

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{12-15\cdot 0{,}8}{\sqrt{2{,}4}}=\frac{12-12}{\sqrt{2{,}4}}=0;$$

Интегральная теорема Лапласа.

Вероятность того, что в п независимых испытаниях, проведенных по схеме Бернулли, событие наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt$ - интегральная функция Лапласа.

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npg}};\ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npg}};$$

Значение функции Лапласа занесены в таблицу.
Свойства функции Ф(х):
1)Ф(-х) = -Ф(х);
2) если х > 5, то Ф(х) ≈ 0,5.

Пример 4.

Вероятность того, что подготовка почвы к посеву выполнена с соблюдением требований агротехники 0,75. Найти вероятность того, что из 100 делянок почва подготовлена к посеву не меньше чем на 70 и не больше чем на 80.

Решение.

По условию, р = 0,75; q = 1 - 0,75 = 0,25; n = 100; k_1 =100, k_2 =80.
$P_{100}(70,80) = Ф(x_2)-Ф(x_1)$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 0{,}75 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{-5}{4{,}33} = -1{,}15$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 0{,}75 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} = \frac{5}{4{,}33} = 1{,}15$$

Таким образом, имеем

$P_{100}(70,80)$ = Ф(+1,15) - Ф(-1,15) = Ф(1,15) + Ф(1,15) = 2Ф(,15).

По таблице находим Ф(1,15) = 0,3749.
Искомая вероятность Р100(70,80) = 2 • 0,3749 = 0,7498.

Случайные величины. Законы их распределения

Случайной величиной называется величина, которая в результате испытания может принять то или иное числовое значение, причем заранее не известно, какое именно. Примеры случайных величин:

1) годовой удой от одной коровы в литрах;
2) число яиц, полученных от одной несушки за год;
3) число растений ржи на 1 м^2 ;
4) глубина заделки семян при посеве.

Дискретной называется случайная величина, значения которой изолированы друг от друга, и их можно пронумеровать. При этом число значений может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называется случайная величина, значения которой сплошь заполняют некоторый интервал, конечный или бесконечный.

Законом распределения дискретной случайной величины Х называется соответствие между возможными значениями случайной величины и вероятностями этих значений.

Закон распределения чаще всего записывают в виде таблицы из двух строк. В верхней строке перечисляются значения, которые принимает случайная величина, а в нижней - вероятности этих значений, т.е.

X	x_1	x_2	. . .	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

$p_i = P(X = x_i) \geq 0; i = 1,2... n.$

Заметим, что всегда $p_1 + p_2 + ... + p_i = 1$.

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1,p_1)$; $M_2(x_2,p_2)$ ... $M_n(x_n,p_n)$ и соединяют их отрезками прямой. Полученную фигуру называют многоугольником распределения.

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \quad \text{или}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(x))^2 \, p,$$

Справедлива и другая формула: $D(X) - M(X^2) - M^2(X)$

Дисперсия характеризует рассеяние возможных значений случайной величины вокруг своего математического ожидания, мерой такого рассеяния является среднее квадратическое отклонение, равное корню квадратному из дисперсии, т.е. $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$

Пример 5.

Найти математическое ожидание числа заболевших животных в выборке из 5 животных, случайная величина X (число заболевших животных), задана рядом распределения.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,2373	0,3955	0,2637	0,0879	0,0146	0,001

Решение.

По формуле M(X) = $\sum_{i=1}^{6} x_i p_i$ находим

M(X) = 0 • 0,2373 + 1 • 0,3955 + 2 • 0,2637 + 3 • 0,0879 + + 4 • 0,0146 + 5 • 0,001 = 1,25.

Законы распределения непрерывной случайной величины

Функцией распределения или интегральным законом распределения называют функцию F(x), определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньше x, т.е. F(x) = P(X < x).

Плотностью распределения вероятностей или дифференциальной функцией распределения f(x) называется первая производная от функции распределения: f(x) = F^{I}(x).

Если на формирование величин влияет большое число факторов, влияние каждого из них мало и ни один фактор не имеет значительного преимущества перед другими, то эти величины можно отнести к величинам, имеющим нормальный закон распределения, полагая, что их возможные значения неотрицательны.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, плотность которого имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где σ - среднее квадратическое отклонение,

a - математическое ожидание случайной величины X.

Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, вероятность попадания ее значений в интервал (α, β) вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Φ(x) - функция Лапласа.

Вероятность отклонения нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания менее чем на 5 равна: $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Правило трех сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

Задача. Средняя масса годовалого осетра 230 г, среднее квадратичное отклонение 5 г. Полагая, что случайная величина X, равная массе годовалого осетра, распределена нормально, найти:

1) вероятность того, что масса наудачу выловленного осетра будет заключена в пределах от 220 г до 240 г;

2) вероятность того, что абсолютная величина отклонения значений случайной величины от ее математического ожидания окажется меньше 3 г;

3) по правилу трех сигм найти наименьшую и наибольшую границы предполагаемой массы годовалого осетра.

Решение.

В соответствии с принятыми обозначениями (см. формулу выше): a = 230 (г), σ = 5 (г), β = 240 (г) и δ = 3(г). Тогда

1)P(220<x<240) = $\Phi\left(\frac{240-230}{5}\right)-\Phi\left(\frac{220-230}{5}\right)$ = Φ(2) - Φ(2) = =

2Φ(2) = 0,9544

2) P(|X-230|<3) = $2\Phi\left(\frac{3}{5}\right)$ = 2Φ(0,6) = 2- 0,2257 = 0,4514.

3)3-σ = 3-5 = 15 (г).

Значит наибольшая и наименьшая границы будут 230 ±15 (г). То есть масса годовалого осетра заключена в интервале от 215 г до 245 г с вероятностью 0,997 ≈ 1,0.

Тема 8. Статистические оценки параметров распределения.

Математическая статистика - наука, занимающаяся разработкой методов получения, описания и использования статистических данных с целью изучения закономерностей, присущих массовым случайным явлениям. Многие задачи статистики связаны с исследованием и контролем количественных и качественных показателей продукции того или иного конкретного производства. В основе их решения лежит выборочный метод, сущность которого состоит в следующем. Обследуется распределение какого-либо признака для весьма большой совокупности объектов. Сделать это для каждого объекта совокупности практически невозможно, поэтому исследуют часть её - выборку. Очевидно, что по выборочным характеристикам можно судить обо всей совокупности только приближённо. Одной из задач статистики является оценка параметров распределения случайной величины по данным выборки. В качестве оценки генеральной средней (среднего значения признака на всей совокупности объектов, подлежащих обследованию) служит выборочная средняя (среднее значение признака на части элементов генеральной совокупности, случайно отобранных из неё), а в качестве оценки дисперсии генеральной совокупности используют исправленную выборочную дисперсию. Если случайная величина имеет нормальное распределение, то в этом случае становится возможным применять так называемые интервальные оценки. Доверительным интервалом называется найденный по данным выборки интервал (Θ - δ,Θ + δ), который покрывает оцениваемый параметр Θ с заданной надёжностью γ. Надёжность γ обычно принимают равной 0,95 или 0,99, или 0,999. Конечно, нельзя категорически утверждать, что найденный доверительный интервал покрывает параметр Θ. Но в этом можно быть уверенным на 95% при γ= 0,95, на 99% при γ= 0,99 и т.д. Это значит, что если сделать много выборок, то для 95% из них (если, например, γ= 0,95) вычисленные доверительные интервалы покрывают параметр Θ.

Задача. Для определения средней урожайности сахарной свеклы в совхозе на площади 1000 га была определена её урожайность на 100 га. Результаты выборочного обследования представлены следующим распределением:

Урожайность, ц/га	23-25	25-27	27-29	29-31	31-33	33-35	35-37
Площадь, га	4	10	6	16	15	30	20

Найти: 1) величину, которую следует принять за среднюю урожайность на всём массиве;

2) величину, которую следует принять за среднее квадратичное отклонение урожайности на всём массиве;

3) доверительный интервал в котором с вероятностью 0,95 заключена средняя урожайность на всём массиве.

Решение.

1) В качестве приближённого значения средней урожайности на всём массиве принимаем среднюю арифметическую данного в условии распределения, т.е. выборочную среднюю:

$$\bar{x} \approx \bar{x}_B = \frac{1}{n}\sum_{n=1} x_i \cdot n_i, \text{ (n = n}_1 + \text{n}_2 + ... + \text{n}_k).$$

За значение признака нужно принять середины интервалов. Получим:

$$\bar{x}_B = \frac{24\cdot 3 + 26\cdot 10 + 28\cdot 6 + 30\cdot 16 + 32\cdot 15 + 34\cdot 30 + 36\cdot 20}{100} =$$

$$= \frac{72 + 260 + 168 + 480 + 480 + 1020 + 720}{100} = \frac{3200}{100} = 32.$$

Значит, приближённое значение средней урожайности на всём массиве будет х ~ 32 ц.

2) Для оценки дисперсии генеральной совокупности применяем формулу

$$\sigma^2 \approx S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - x_B)^2 \cdot n_i}{n-1}, (n = n_1 + n_2 + ... + n_k).$$

$S_n^2 = \frac{1}{99}$ • (3(24 - 32)^2 + 10(26 - 32)^2 + 6(28 - 32)^2+ 16(30 - 32)^2 + + 15(32 - 32)^3 + 30(34 - 32)^2 + 20(36 - 32)^2) = $\frac{1}{99}$ • (192 + 360 + 96+ 64 + + 0 + 120 + 320) = $\frac{1152}{99}$ = 11,64.

Значит, приближённое значение дисперсии на всём массиве будет, σ ~ 11,64, отсюда среднее квадратичное отклонение урожайности на всём массиве равно S = $\sqrt{11{,}64}$ = 3,4. Найдём среднее квадратичное отклонение выборочной средней по формуле $\sigma_x = S_x = S_n/\sqrt{n}$.

Получим $\sigma_{\bar{x}} = \frac{3{,}4}{\sqrt{100}} = 0{,}34.$

Итак, оценка средней урожайности сахарной свеклы на всём массиве равна 32 ц со средней квадратичной ошибкой 0,34 ц. Оценка среднего квадратичного отклонения урожайности на всём массиве равна 3,4 ц.

3) Для вычисления доверительного интервала воспользуемся равенством $P\left(\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma$,

согласно которому можно утверждать, что с надёжностью γ доверительный интервал $\left(\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}, \bar{x}_B + \frac{t_B \cdot S}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестное математическое ожидание, точность оценки: $\delta = \dfrac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}$.

Поскольку n = 100 > 30, то пользуемся нормальным распределением. Значит,

$$P\left(\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} \right) = 2\Phi\left(t_\gamma\right) = \gamma .$$

Из равенства $2\Phi(t_\gamma) = 0,95$ следует $\Phi(t_\gamma) = 0,475$ и по таблице 3 приложения находим 1,96. Следовательно, точность оценки

$$\delta = \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} = \frac{1,96 \cdot 3,4}{\sqrt{100}} = 0,67 .$$

Концы доверительного интервала

$x_в$ - δ = 32 - 0,67 = 31,33 и $x_в$ + δ = 32 + 0,67 - 32,67.

Таким образом, с вероятностью 0,95 средняя урожайность сахарной свёклы на всём массиве заключена в границах от 31,33 ц до 32,67 ц.

Тема 9. Элементарные сведения из теории корреляции

На практике часто приходится иметь дело с зависимостью между переменными более сложной, чем функциональная. Такова, например, зависимость между количеством внесённых удобрений X и собранным урожаем Y. Здесь каждому значению X соответствует множество возможных значений величины Y (осадки, почвы, уход). Вместе с тем, как показывает опыт, средний урожай является функцией от количества удобрений. Подобного рода зависимость относится к корреляционным. Обычно корреляционную зависимость между случайными величинами оценивают, определяя выборочный коэффициент корреляции (он характеризует тесноту зависимости между случайными величинами) и находя выборочные уравнения прямых регрессии (они показывают, как в среднем одна величина зависит от другой).

Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

1) величина его по модулю не превосходит единицы, т.е.

$$- 1 < r_B < 1;$$

2) если $r_B = 1$, то зависимость между X и Y является обычной функциональной зависимостью;

3) если $r_B = 0$, то линейной корреляции между X и Y нет;

4) если $0 < r_B < 1$, то между X и Y существует корреляционная зависимость. При этом связь между переменными тем теснее, чем ближе r_B к единице.

$| r_B | < 0,3$ - связь слабая,

$0,3 < | r_B | < 0,7$ - связь средняя,
$| r_B | > 0,7$ - связь сильная.

Задача.

Были произведены измерения общей длины ствола в см (X) и длины его части без ветвей (Y) 10 молодых сосен. Результаты этого измерения представлены в следующей таблице:

X	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
Y	14	18	19	20	23	23	24	26	29	34

Вычислить выборочный коэффициент корреляции и найти выборочное уравнение прямой регрессии Y на X.

Решение.

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле

$$r_B = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_B)(y_i - \bar{y}_B)}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 \sum (y_i - \bar{y}_B)^2}}$$

Для вычисления величин, входящих в формулу, составим вспомогательную таблицу, в которой результаты измерений записаны столбцами. Внизу каждого из этих столбцов вычислены суммы для нахождения средних $x_в$ и $y_в$. Далее расположены столбцы, в которых вычисляются разности x_i - $x_в$ и y_i - $y_в$, их квадраты и произведения. Значения этих столбцов суммируются, чтобы получить величины, необходимые для подстановки в формулу. Отметим, что суммы в столбцах, в которых вычислены разности x_i - $x_в$ и y_i - $y_в$ будут всегда равны 0.

x_i	y_i	x_i-x_B	$(x_i$-$x_B)^2$	y_i-y_B	$(y_i$-$y_B)^2$	$(x_i$-$x_B)$ $(y_i$-$y_B)$
25	14	45	2025	-9	81	405
35	18	35	1225	-5	25	175
45	19	25	625	-4	16	100
55	20	15	225	-3	9	45
65	23	-5	25	0	0	0
75	23	5	25	0	0	0
85	24	15	225	1	1	15
95	26	25	625	3	9	75
105	29	35	1225	6	36	210
115	34	45	2025	11	121	495
700	230	0	8250	0	298	1520

Находим средние x_B и y_B: $\bar{x}_B = \frac{700}{10} = 70, \bar{y}_B = \frac{230}{10} = 23$

Из таблицы имеем:

$$\sum(x_i-\bar{x}_B)(y_i-\bar{y}_B)=1520,\ \sum(x_i-\bar{x}_B)^2=8250,\ \sum(y_i-\bar{y}_B)^2=298$$

Подставляя эти значения в формулу для вычисления коэффициента корреляции, получим $r_B=\dfrac{1520}{\sqrt{8250}\cdot\sqrt{298}}\approx 0{,}97$

Вывод:

Таким образом, у выбранных сосен имеет место очень сильная корреляция между общей длиной ствола и длиной его части без ветвей.

Найдём теперь выборочное уравнение прямой регрессии Y на X. Это уравнение имеет вид: $y-\bar{y}_B=r_B\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\cdot(x-\bar{x}_B)$

за приближённые значения σ_x и σ_y принимают соответственно

$$\sigma_x\approx\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_B)^2}\quad \sigma_y\approx\sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}_B)^2}$$

Тогда $\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\sqrt{\dfrac{\sum(y_i-\bar{y}_B)^2}{\sum(x_i-\bar{x}_B)^2}}=\sqrt{\dfrac{298}{8250}}\approx\sqrt{0{,}0361}\approx 0{,}19$

Подставляя в выборочное уравнение прямой регрессии Y на X

$$\bar{x}_B=70,\ \bar{y}_B=23,\ r_B=0{,}97,\ \frac{\sigma_y}{\sigma_x}=0{,}19$$

получим y - 23 = 0,97 • 0,19(x -70) или y - 23 = 0,18x - 12,6.

Вывод:

y = 0,18x + 10,4 - искомое уравнение прямой регрессии Y на X.

Задания для контрольных работ

В задачах **1-20** даны координаты вершин треугольника ABC. Найти: 1) длины стороны AB;

2) уравнение сторон AB и BC и их угловые коэффициенты;

3) уравнение высоты CD и её длину;

4) уравнение медианы AE;

5) уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB.

1	A(-8;-3)	B(4;-12)	C(8;10)	**11**	A(-2;7)	B(10;-2)	C(8;12)
2	A(-5;7)	B(7;-2)	C(11;20)	**12**	A(-6;8)	B(6;-1)	C(4;13)
3	A(-12;-1)	B(0;-10)	C(4;12)	**13**	A(3;6)	B(15;-3)	C(13;11)
4	A(-10;9)	B(2;0)	C(6;22)	**14**	A(-10;5)	B(2;-4)	C(0;10)
5	A(0;2)	B(12;-7)	C(16;15)	**15**	A(-4;12)	B(8;3)	C(6;17)
6	A(-9;6)	B(3;-3)	C(7;19)	**16**	A(-3;10)	B(9;1)	C(7;15)
7	A(1;0)	B(13;-9)	C(17;13)	**17**	A(4;1)	B(16;-8)	C(14;6)
8	A(-4;10)	B(8;1)	C(12;23)	**18**	A(-7;4)	B(5;-5)	C(3;9)
9	A(2;5)	B(14;-4)	C(18;18)	**19**	A(0;3)	B(12;6)	C(10;8)
10	A(-1;4)	B(11;-5)	C(15;17)	**20**	A(-5;9)	B(5;0)	C(5;14)

В задачах **61 - 80** найти производные и дифференциалы указанных функций.

$61.a)\ y = 2x^2 - \frac{1}{5x^5} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 1$ $\quad$ $б)\ y = \frac{\sin x + \sqrt{x}}{tgx + 2^x}$

$в)\ y = \ln\left(x^2 - e^x\right)$

$62.a)\ y = \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{3x^6} - \frac{2}{3x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 3$ $\quad$ $б)\ y = \left(e^x + tgx\right)\cdot\left(\ln x - ctgx\right)$

$в)\ y = \left(5^x + \sin x\right)^2$

$63.a)\ y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3x^9} + \frac{5}{\sqrt[5]{x^2}} + 1$ $\quad$ $б)\ y = \frac{\cos x - tgx}{3^x - \ln x}$

$в)\ y = \arcsin\sqrt{x+1}$

$64.a)\ y = \frac{1}{5}\cdot x^5 - \frac{2}{3x^6} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 2$ $\quad$ $б)\ y = \left(arctgx + 5^x\right)\cdot\left(\cos x - \sqrt{x}\right)$

$в)\ y = e^{\sin 3x + 2}$

$65.a)\ y = \frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{5\sqrt{x}} + 1$ $\quad$ $б)\ y = \frac{5 - \ln x}{\cos x - 2}$

$в)\ y = e^{3x} - 2x\cdot tg(3x)$

$66.a)\ y = \frac{1}{4}x^8 + \frac{8}{\sqrt[8]{x}} - \frac{2}{x^4} + 3$ $\quad$ $б)\ y = \frac{e^x - \sin x}{\cos x + \sqrt{x}}$

$в)\ y = \cos\left(2x^2 + 1\right)$

$67.a)\ y = \frac{1}{5}x^5 - 3\sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x^2} - 4$ $\quad$ $б)\ y = \left(\ln x - \sin x\right)\cdot\left(\cos x + 2^x\right)$

$в)\ y=\arcsin(5x+1)$

$68.а)\ y=\frac{7}{8}x^8-5\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{3x^3}-1$

$б)\ y=\frac{\cos x-2^x}{tgx-\sqrt{x}}$

$в)\ y=tg(2^x+3)$

$69.а)\ y=\frac{3}{5}x^5-\frac{2}{3\sqrt[4]{x^3}}-\frac{1}{2x^4}+3$

$б)\ y=(\arcsin x-e^x)\cdot(\ln x+2^x)$

$в)\ y=(tgx+ctgx)^3$

$70.а)\ y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{7\sqrt[7]{x^3}}-\frac{2}{3x^3}-1$

$б)\ y=\frac{5^x+\cos x}{\sqrt{x}-tgx}$

$в)\ y=\ln(\cos x+\sin x)$

$71.а)\ y=4x^3-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}-\frac{2}{x^2}+1$ $б)\ y=(\sqrt{x}+5$

$в)\ y=e^{\sin 5x}$

$72.а)\ y=3x^4-\frac{5}{3x^3}-9\sqrt[3]{x^2}-1$

$б)\ y=\frac{arctgx-\sqrt{x}}{1+x^2}$

$в)\ y=\sqrt[4]{x^2+\ln x}$

$73.а)\ y=2x^5-\frac{1}{3x^3}+\frac{4}{\sqrt[4]{x}}+3$

$б)\ y=(x^2-2)\cdot(\sin x+2^x)$

$в)\ y=(\cos x+tgx)^4$

$74.а)\ y=4x^2-\frac{5}{6x^5}+\frac{10}{\sqrt[5]{x^4}}+3$

$б)\ y=(1-x^2)\cdot(ctgx+3^x)$

$в)\ y=\sqrt{x^3+\sin 3x}$

$75.а)\ y=3x^5-\frac{2}{3x^3}+\frac{6}{\sqrt[3]{x^2}}+3$

$б)\ y=\frac{5x+\sqrt{x}}{ctgx-2}$

$в)\ y=(\ln x-\cos 3x)^7$

$76.a)y=3x^5-\frac{5}{4x^4}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+1$ $\quad$ $б)y=\frac{\cos x-3^x}{tgx-5}$

$в)y=\arcsin\sqrt{2^x+\frac{1}{x}}$

$77.a)y=2x^5+\frac{4}{5x^5}-\frac{2}{\sqrt{x}}+3$ $\quad$ $б)y=\left(\sin x-\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(\ln x+e^x\right)$

$в)y=\left(\cos x\cdot 5^x\right)$

$78.a)y=3x^2-\frac{4}{3x^3}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+1$ $\quad$ $б)y=\frac{tgx-ctgx}{5^x-3}$

$в)y=arctg\sqrt[2]{x+1}$

$79.a)y=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3x^3}-\frac{8}{\sqrt{x}}+3$ $\quad$ $б)y=\left(\cos x+\sqrt{x}\right)\cdot\left(tgx+e^x\right)$

$в)y=\ln\left(x^2-e^x+1\right)$

$80.a)y=\frac{5}{4}x^4-\frac{1}{6x^6}+\frac{7}{\sqrt[7]{x^2}}+2$ $\quad$ $б)y=\frac{\sin x-\cos x}{5^x-\ln x}$

$в)y=e^{\sin\left(x^2+1\right)}$

В задачах **81- 100 н**айти неопределенные интегралы.

$81.a)\int\left(3x^2-\frac{7}{x^8}-\sqrt{x}+1\right)dx$ $\quad$ $б)\int\frac{1}{3x+1}dx$

$в)\int x\cdot e^x dx$

$82.a)\int\left(2x-\frac{5}{x^6}-\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)dx$ $\quad$ $б)\int\frac{1}{\cos^2(7x+1)}dx$

$в)\int(x+2)\cdot\cos x dx$

$83.a)\int\left(5x^4+\frac{3}{x^4}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx$ $\quad$ $б)\int e^{7x+1}dx$

$в)\int x\cdot\ln x dx$

$84.a)\int\left(3x^2-\frac{6}{x^7}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+2\right)dx$ $б)\int xe^{x^2+1}dx$

$в)\int (x+3)\cdot \sin xdx$

$85a)\int\left(4x^3-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}}+3\right)dx$ $б)\int x\cdot\sqrt{3x^2-7}dx$

$в)\int x^2\cdot \ln xdx$

$86.a)\int\left(5x^2-\frac{7}{x^8}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx$ $б)\int \frac{1}{(5x+2)^4}dx$

$в)\int (x+1)\cdot \cos xdx$

$87.a)\int\left(3x^2+\frac{2}{x^3}-\sqrt{x}+3\right)dx$ $б)\int \frac{1}{x\cdot \ln x}dx$

$в)(x+2)\cdot 2^x dx$

$88.a)\int\left(2x-\frac{3}{x^4}+\sqrt[3]{x}+1\right)dx$ $б)\int \cos^3 x\cdot \sin xdx$

$в)\int x^3\cdot \ln xdx$

$89.a)\int\left(3x^2-\frac{1}{x^5}+\frac{2}{\sqrt{x}}+3\right)dx$ $б)\int \frac{(1+tgx)^2}{\cos^2 x}dx$

$в)\int x\cdot 7^x dx$

$90.a)\int\left(2x^4-\frac{1}{3x^2}-\sqrt{x}+1\right)dx$ $б)\int \sqrt{3x+1}dx$

$в)\int x^7\cdot \ln xdx$

$91.a)\int\left(7x^6-\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x}+3\right)dx$ $б)\int \sqrt[3]{\sin x}\cdot \cos xdx$

$в)\int (x+1)\cdot e^x dx$

$$92.a)\int\left(5x^4-\frac{2}{3x^4}-\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)dx \qquad б)\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$в)\int\sqrt{x}\cdot\ln x dx$$

$$93.a)\int\left(3x^2-\frac{5}{x^6}-\frac{2}{\sqrt{x}}+3\right)dx \qquad б)\int\frac{1}{\sin^2(5x-1)}dx$$

$$в)\int(x+3)\cdot 2^x dx$$

$$94.a)\int\left(2x^4-\frac{3}{x^4}+\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)dx \qquad б)\int x\sqrt{2x^2-1}dx$$

$$в)\int(x-1)3^x dx$$

$$95.a)\int\left(2x^3-\frac{5}{x^3}-\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)dx \qquad б)\int\frac{(1+\ln x)^2}{x}dx$$

$$в)\int x^5\cdot\ln x dx$$

$$96.a)\int\left(x^3-\frac{8}{x^9}-\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)dx \qquad б)\int\frac{(x-3)}{x^2-6x+1}$$

$$в)\int x\cdot\sin x dx$$

$$97.a)\int\left(x^2-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}}+3\right)dx \qquad б)\int\frac{dx}{x\cdot(\ln x+1)}dx$$

$$в)\int\sqrt[3]{x}\cdot\ln x dx$$

$$98.a)\int\left(2x^5-\frac{5}{x^6}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx \qquad б)\int\sin(8x-1)dx$$

$$в)\int(x-5)\cos x dx$$

$$99.a)\int\left(3x^5-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+2\right)dx \qquad б)\int\cos(9x+2)dx$$

$$в)\int x^6\cdot\ln x dx$$

$$100.\text{а)}\int\left(7x^6-\frac{8}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^5}-1\right)dx \qquad \text{б)}\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

$$\text{в)}\int(x-3)2^x\,dx$$

101. В среднем из 10 женихов 2 и из 10 невест 1 имеют отрицательный резус-фактор. Какова вероятность « отрицательной » пары при случайном выборе?

Ответ: 1/50

102. Среди 10 самцов плодовой мушки 7 имеют мутацию глаз, а среди 10 самок - 8 имеют мутацию крыльев. Какова вероятность того, что случайно выбранная для скрещивания пара не имеет мутаций?

Ответ: 3/50

103. Врач назначил больному один из трех сульфаниламидов и один из пяти антибиотиков, но больной забыл, какие именно. Какова вероятность того, что при случайном выборе больной выпьет нужные лекарства?

Ответ: 1/15

104. Из 200 кур 50 белых, 100 красных и 50 полосатых, из 25 петухов 6 белых, 14 красных и 5 полосатых. Предполагая, что скрещивание происходит случайно, найти вероятность белой пары.

Ответ: 3/50

105. В популяции диких кроликов, в среднем, из 100 самцов 10 имеют черную окраску, 5 — коричневую, а остальные — обыкновенную пятнистую, аналогично распределяются по окраске самки. Считая, что скрещивание происходит случайно, найти вероятность черной пары при скрещивании 100 самцов и 100 самок.

Ответ: 1/100

106. В одном гнезде находится 3 яйца, из которых вылупятся самки и 4, из которых вылупятся самцы, а в другом гнезде, соответственно 3 и 5. Из каждого гнезда случайным образом выбирают по одному яйцу. Какова вероятность того, что из этих яиц вылупятся самки?

Ответ: 9/56

107. Имеется 5 пробирок с 5 штаммами одного вида бактерий и 4 пробирки с 4 штаммами другого вида бактерий. Для эксперимента нужно выбрать 1 штамм первого вида и 1 - второго. Какова вероятность правильного выбора, если на пробирках указаны виды, но забыли указать номера штаммов?

Ответ: 1/20

108. Для проведения реакции нужно взять одну из трех кислот и одну из трех щелочей. Какова вероятность правильно выбрать реактивы при случайном выборе?

Ответ: 1/9

109. На ферме имеется 5 телочек и 4 бычка. Одна телочка и один бычок - близнецы. Какова вероятность, выбрать близнецов при случайном выборе телочки и бычка?

Ответ: 1/20

110. В одной конюшне 2 серых и 3 вороных лошади, в другой 3 серых и 1 вороная. Какова вероятность, выбирая по одной лошади из каждой конюшни, составить одномастную пару?

Ответ: 9/20

111.Четыре невесты с группами крови от первой до четвертой выходят замуж за 4 женихов с группами крови от первой до четвертой. Какова вероятность пар с одинаковой группой крови?

Ответ: 1/4

112. Для случайного скрещивания отобраны 10 самцов дрозофил, среди которых 3 имеют мутацию крыльев, 2 - мутацию глаз, а остальные 5 не имеют мутаций, и 8 самок дрозофил, среди которых 4 имеют мутацию крыльев и 4 не имеют никаких мутаций. Какова при этом вероятность пары без мутаций?

Ответ: 1/4

113. В трех клетках содержалось по паре мышей в каждой: одна белая и одна серая. Однажды клетки забыли запереть, и мыши разбежались по лаборатории. Их поймали и снова посадили в клетки: по одной белой и одной серой. Какова вероятность того, что в первой клетке оказалась прежняя пара?

Ответ: 1/9

114. В первой части курса из 20 вопросов студент знает 15, во второй части - из 10 знает 5. Какова вероятность того, что студент ответит на произвольных 2 вопроса, один из которых - в первой части, а другой - из второй?

Ответ: 15/40

115. В помете 2 рыжих щенка и 5 черных. Наудачу выбирают 3-х щенков. Какова вероятность того, что они все черные?

Ответ: 2/7

116. Из 12 крыс 8 получили некоторую дозу облучения. Какова вероятность того, что 2 выбранные наудачу крысы облучены?

Ответ: 14/33

117. На ферме из 12 коров 3 больные. Найти вероятность, что наудачу выбранные 3 коровы здоровые?

Ответ: 14/55

118. Из 15 арбузов 3 неспелых. Какова вероятность того, что выбранные 2 арбуза спелые?

Ответ: 22/35

119. Из 9 лабораторных мышей 7 вакцинированы. Какова вероятность того, что 3 наудачу выбранные мыши вакцинированы?

Ответ: 5/12

120. Среди 10 доноров 4 имеют первую группу крови. Какова вероятность того, что два наудачу выбранных донора имеют первую группу крови?

Ответ: 2/15

121. Всхожесть семян данного растения составляет 80 %. Найти вероятность того, что из 4-х посеянных семян взойдут:

а) 2;

б) не менее 3-х.

122. Вероятность поражения клубней картофеля паршей 0,4. Найти вероятность того, что из 5 клубней поражены:

а) три;

б) ни одного.

123. Эффективность некоторой вакцины 75 %. Вакцинировались 5 животных. Найти вероятность того, что хотя бы 4 животных приобретут иммунитет.

124. Вероятность механического повреждения клубней картофеля при уборке 0,15. Найти вероятность того, что среди 4 клубней будет не более одного поврежденного.

125. У семи животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0,99. Какова вероятность того, что:

а) выздоровят только шестеро;

б) выздоровят все.

126. Семена содержат 0,1 % сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 2000 семян обнаружить 5 семян сорняков?

127. Вероятность выживания бактерий после радиоактивного облучения равна 0,004. Найти вероятность того, что после облучения из 500 бактерий останется не менее 3 бактерий?

128. Вероятность события = 8 (одно посеянное зерно пшеницы не прорастет) равна 0,009. Какова вероятность того, что из 1000 семян не прорастет ровно 8?

129. Доля поражения зерна вредителями в скрытой форме составляет 0,002. Найти вероятность, что из 500 семян 10 семян будут поражены вредителями.

130. Ботанический сад отправил в магазин 500 корней роз. Вероятность того, что в пути растения повредятся, равна 0, 002. Найти вероятность того, что в

магазин прибудут 3 поврежденных растения.

131. Было посажено 500 кустов. Найти вероятность того, что число прижившихся кустов больше 250, если вероятность, что куст приживется, равна 0,8.

132. Вероятность поражения лука белой гнилью 0,2. Найти вероятность, что среди 200 головок лука пораженных будет меньше 50.

133. Вероятность того, что культура не перенесет зиму 0,25. Найти вероятность, что из 300 растений не перенесут зиму менее 100 растений.

134. Вероятность осложнения после вакцинации 0,2. Найти вероятность, что среди 400 вакцинированных животных осложнения будут менее чем у 100 животных.

135. Найти вероятность, что среди 100 кочанов капусты окажется 70 кочанов с гусеницами, если вероятность повреждения кочана гусеницами 0,15.

136. Всхожесть семян данного растения составляет 90 %. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдет не менее 700.

137. Было посажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев равно 250, если вероятность, что отдельное дерево приживется, равна 0,8.

138. Посажено600 семян кукурузы с вероятностью прорастания для каждого семени, р = 0,8. Найти вероятность, что 500 семян прорастет.

139. Вероятность повреждения пакетов с семенами при перевозке ОД. Найти вероятность, что из 200 пакетов будут повреждены 3.

140. Вероятность заболевания бешенством бродячих собак 0,4. Какова вероятность, что среди 50 собак будет 30 заболевших?

В задачах **141-160** задан закон распределения с. в. х.
Найти: 1) математическое ожидание M (X);
2) дисперсию D(X);
3) среднее квадратическое отклонение σ.

141	x p	23 0,3	25 0,2	28 0,4	29 0,1	**151**	x p	46 0,2	49 0,3	51 0,1	55 0,4	
142	x p	17 0,2	21 0,4	25 0,3	27 0,1	**152**	x p	18 0,2	22 0,3	23 0,4	26 0,1	
143	x p	24 0,2	26 0,2	28 0,5	30 0,1	**153**	x p	1 0,3	2 0,3	3 0,1	4 0,1	5 0,2
144	x p	12 0,1	16 0,5	19 0,3	21 0,1	**154**	x p	1 0,1	2 0,5	3 0,1	4 0,2	5 0,1
145	x p	25 0,2	27 0,4	30 0,3	32 0,1	**155**	x p	1 0,1	2 0,1	3 0,2	4 0,2	5 0,4
146	x p	30 0,1	32 0,5	35 0,2	40 0,2	**156**	x p	1 0,3	2 0,2	3 0,1	4 0,2	5 0,2
147	x p	12 0,1	14 0,2	16 0,5	20 0,2	**157**	x p	1 0,1	2 0,1	3 0,6	4 0,1	5 0,1
148	x p	21 0,1	25 0,4	28 0,2	31 0,3	**158**	x p	1 0,2	2 0,1	3 0,1	4 0,4	5 0,2
149	x p	60 0,1	64 0,3	67 0,4	70 0,2	**159**	x p	1 0,2	2 0,2	3 0,1	4 0,3	5 0,2
150	x p	45 0,2	47 0,4	50 0,3	52 0,1	**160**	x p	1 0,5	2 0	3 0,2	4 0,1	5 0,2

В задачах **161 - 170** дано, что масса вылавливаемых в пруду зеркальных карпов - случайная величина X, распределенная по нормальному закону с математическим ожиданием d и средним квадратическим отклонением σ.

Найти: а) вероятность того, что масса наудачу выловленного карпа будет заключена в пределах от x_1 до x_2;

б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения X—d окажется меньше δ;

в) по правилу трех сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаем массы.

№ задачи	d	σ	x_1	x_2	δ
161	375	25	300	425	40
162	375	30	300	450	50
163	400	30	350	425	25
164	500	75	425	550	60
165	500	50	450	525	30
166	400	25	375	450	35
167	450	40	400	500	50
168	450	50	425	475	70
169	425	30	375	475	60
170	425	35	400	450	50

В задачах **171 - 180** предполагаем, что вес яиц - нормально распределенная случайная величина X, с математическим ожиданием d и средним квадратическим отклонением σ. В заготовку принимаются яйца от x_1 до x_2 граммов веса.

Определить: а) вероятность того, что наудачу взятое яйцо пойдет в заготовку:

б) вероятность того, что абсолютная величина отклонения X - d окажется меньше δ;

в) по правилу трех сигм найти наибольшую и наименьшую границы предполагаемого веса яйца.

№ задачи	d	σ	x_1	x_2	δ
171	60	7	50	65	10
172	59	6	50	65	8
173	59	5	50	60	10
174	60	6	55	65	5
175	58	6	55	65	6
176	58	5	55	60	7
177	58	7	50	65	9
178	59	7	55	60	6
179	60	5	50	70	8
180	61	7	55	70	8

В задачах **181-190** для средней урожайности пшеницы в каждом из двадцати совхозов района была определена урожайность на 100 га в каждом из них.

Для каждого совхоза найти: 1) величину, которую следует принять за среднюю урожайность на всём массиве;

2) величину, которую следует принять за среднее квадратическое отклонение урожайности на всём массиве;

3) доверительный интервал, в котором с вероятностью 0.95 заключена средняя урожайность на всём массиве.

181 Урожайность, ц/га	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Площадь, га	5	11	17	14	22	11	20
182 Урожайность, ц/га	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
Площадь, га	3	3	8	15	9	22	40
183 Урожайность, ц/га	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Площадь, га	8	2	**5**	7	11	29	38
184 Урожайность, ц/га	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
Площадь, га	10	11	13	17	5	22	22
185 Урожайность, ц/га	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Площадь, га	5	13	15	17	12	20	18
186 Урожайность, ц/га	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
Площадь, га	7	8	13	14	21	23	11
187 Урожайность, ц/га	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Площадь, га	9	7	14	15	18	21	16
188 Урожайность, ц/га	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
Площадь, га	3	5	12	21	23	17	19
189 Урожайность, ц/га	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22	22-24
Площадь, га	4	8	15	21	25	13	14
190.Урожайность, ц/га	11-13	13-15	15-17	17-19	19-21	21-23	23-25
Площадь, га	5	8	10	17	20	25	15

В задачах **191 - 195** приводятся данные об измерении диаметра сосны в см (X) и её высоты в м (Y). Вычислить коэффициент корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X.

191	X	20	22	25	27	28	29	30	32	42	45
	У	18	19	20	21	22	22	23	24	25	26
192	X	18	20	21	24	26	28	29	31	33	40
	У	16	17	18	19	20	20	21	22	23	24
193	X	19	20	21	23	24	29	30	31	38	41
	У	17	19	18	19	20	21	22	25	27	28
194	X	19	21	23	24	25	27	28	30	31	35
	У	17	18	19	21	21	23	24	25	25	27
195	X	21	23	24	25	27	29	30	32	33	38
	У	18	19	21	22	23	24	25	25	26	27

В задачах 196 - 200 приводятся данные о весе зерна в мг (X) и процентном содержании жира в нём (Y). Вычислить коэффициент корреляции и найти уравнение прямой регрессии Y на X.

196	X	35	40	45	48	49	47	45	40	36	35
	У	4	5	6	7	7	6	8	8	4	5
197	X	38	41	44	45	50	51	49	40	39	33
	У	3	9	8	5	5	7	6	9	4	4
198	X	37	39	42	44	49	48	48	39	40	34
	У	3	3	5	8	8	7	6	4	4	2
199	X	36	38	35	39	40	42	43	38	39	41
	У	3	4	2	5	6	7	7	5	6	7
200	X	36	37	38	35	36	40	41	43	35	38
	У	4	5	5	6	4	7	7	6	5	6

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,27,03	1,11	0,3665
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3888
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3901
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4017
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265

0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292

Окончание таблица 1

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
1,48	0,4306	1,75	0,4599	2,03	0,4803	2,60	0,4953
1,49	0,4319	1,76	0,4608	2,04	0,4812	2,62	0,4956
1,50	0,4332	1,77	0,4616	2,05	0,4821	2,64	0,4959
1,51	0,4345	1,78	0,4626	2,06	0,4830	2,66	0,4961
1,52	0,4357	1,79	0,4633	2,07	0,4838	2,68	0,4963
1,53	0,4370	1,80	0,4641	2,16	0,4846	2,70	0,4965
1,54	0,4382	1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,72	0,4967
1,55	0,4394	1,82	0,4656	2,20	0,4861	2,74	0,4969
1,56	0,4406	1,83	0,4664	2,22	0,4868	2,76	0,4971
1,57	0,4418	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,78	0,4973
1,58	0,4429	1,85	0,4678	2,26	0,4881	2,80	0,4974
1,59	0,4441	1,86	0,4686	2,28	0,1887	2,82	0,4976
1,60	0,4452	1,87	0,4693	2,30	0,4893	2,84	0,4977
1,61	0,4463	1,88	0,4699	2,32	0,4898	2,86	0,4979
1,62	0,4474	1,89	0,4706	2,34	0,4904	2,88	0,4980
1,63	0,4484	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,90	0,4981
1,64	0,4495	1,91	0,4719	2,38	0,4913	2,92	0,4982
1,65	0,4505	1,92	0,4726	2,40	0,4918	2,94	0,4984
1,66	0,4515	1,93	0,4732	2,42	0,4922	2,96	0,4985
1,67	0,4525	1,94	0,4738	2,44	0,4927	2,98	0,4986
1,68	0,4535	1,95	0,4744	2,46	0,4931	3,00	0,49865
1,69	0,4545	1,96	0,4750	2,48	0,4934	3,20	0,49931
1,70	0,4554	1,97	0,4756	2,50	0,4938	3,40	0,49966
1,71	0,4564	1,98	0,4761	2,52	0,4941	3,60	0,499841
1,72	0,4573	1,99	0,4767	2,54	0,4945	3,80	0,499928
1,73	0,4582	2,00	0,4772	2,56	0,4948	4,00	0,499968
1,74	0,4591	2,01	0,4783	2,58	0,4951	4,50	0,499997
		2,02	0,4793			5,00	0,499997

Таблица 2

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2e}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986
0,1	3970	3985	3961	3956	3951
0,2	3910	3902	3894	3885	3876
0,3	3814	3802	3790	3778	3765
0,4	3683	3668	3652	3637	3621
0,5	3521	3503	3485	3467	3448
0,6	3332	3312	3292	3271	3251
0,7	3123	3101	3079	3056	3034
0,8	2897	2874	2850	2827	2803
0,9	2661	2637	2613	2589	2565
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323
1,1	2179	2155	2131	2107	2083
1,2	1942	1919	1895	1872	1849
1,3	1714	1691	1669	1647	1626
1,4	1497	1476	1456	1435	1415
1,5	1295	1276	1257	1238	1219
1,6	1109	1092	1074	1057	1040
1,7	0940	0925	0909	0893	1878
1,8	0790	0775	0761	0748	0734
1,9	0656	0644	0632	0632	0608
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0488
2,1	0440	0431	0422	0413	0396
2,2	0335	0347	0339	0332	0317
2,3	0283	0277	0270	0264	0252
2,4	0224	0219	0213	0208	0198
2,5	0175	0171	0167	0163	0154
2,6	0136	0132	0129	0126	0119
2,7	0104	0101	0099	0096	0091
2,8	0079	0077	0075	0073	0069
2,9	0060	0058	0056	0055	0051
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0038
3,1	0033	0032	0031	0030	0028
3,2	0024	0023	0022	0022	0020
3,3	0017	0017	0016	0016	0015
3,4	0012	0012	0012	0011	0010
3,5	0009	0008	0008	0008	0007
3,6	0006	0006	0006	0005	0005

3,7	0004	0004	0004	0004	0004
3,8	0003	0003	0003	0003	0003
3,9	0002	0002	0002	0002	002

Окончание таблица 2

	5	6	7	8	9
0,0	0,3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3945	3945	3932	2925	3918
0,2	3867	3867	3847	3836	3825
0,3	3752	3752	3726	3712	3697
0,4	3605	3605	3572	3555	3538
0,5	3429	3429	3391	3372	3352
0,6	3230	3230	3187	3166	3144
0,7	3011	3011	2966	2943	2920
0,8	2780	2780	2732	2709	2685
0,9	2541	2541	2492	2468	2444
1,0	0,2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1200	1082	1163	1145	1127
1,6	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0396	0387	0379	0371	0393
2,2	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0007	0007	0007	0007	0006

3,6	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0001	0001

СПИСОК ОСНОВНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шипачев В.С. Начала высшей математики. [Текст]: учебное пособие. / В.С. Шипачев – изд. 5-е, стереотипное. Санкт-Петербург: Лань, 2015. – 383 с.: ил. (ЭБС)
2. Соколов Г. А. Основы теории вероятностей: учебник/ Г.А.Соколов, 2-е изд. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2015. – 340 с. (ЭБС)

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

3. 1. Ровба Е.А. Высшая математика. Учебник [Текст]: / Е,А. Ровба, А.С. Ляликов, Е.А. Сетько, К.А. Смотрицкий. Минск: Вышэйшая школа, 2012, 391 с. ил. (ЭБС)
4. 2. Математика для экономического бакалавриата: Учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов.- М.: ИНФРА-М, 2011. – 472 с. (ЭБС)
5. 3. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики: Учебник / А.Н. Бородин. – 8-е изд. – М.: Лань, 2011. – 256 с.(ЭБС)
6. 4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник для студентов вузов / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юнити-Дана, 2010. – 551 с. (ЭБС)

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические указания и задания для контрольных работ

Составители: Налимова Валентина Ивановна
Шумарева Светлана Николаевна
Чащин Олег Николаевич

Печатается в авторской редакции