НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

РЕПЕТИТОР ПО ФИЗИКЕ. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Учебное пособие

Новосибирск 2015

УДК 537.2 (075)
ББК 22.33, Я 73
Р 411

Кафедра теоретической и прикладной физики

Составители: канд. техн. наук, доц. *В. Я. Чечуев*;
д-р техн. наук, проф. *С. В. Викулов*;
канд. пед. наук, доц. *Э. Б. Селиванова*;
ст. препод. *М. Г. Алешкевич*

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *М. П. Синюков* (НГАВТ);
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. И. Сигимов* (НГАВТ)

Репетитор по физике. Электростатика: учеб. пособие / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т; сост.: В. Я. Чечуев, С. В. Викулов, Э. Б. Селиванова, М. Г. Алешкевич. – Новосибирск: ИЦ НГАУ «Золотой колос», 2015. – 86 с.

Учебное пособие содержит материал, изучаемый, согласно программе, в курсе общей физики.

Пособие предназначено для студентов дневной и заочной формы обучения всех направлений подготовки, реализуемых в НГАУ.

Утверждено и реализовано к изданию методическим советом Инженерного института (протокол № 37 от 24 марта 2015 г.)

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены две темы: «Закон Кулона. Теорема Гаусса» и «Потенциал. Работа, энергия электрического поля».

Материал обеих тем изложен следующим образом. Даны определения основных вводимых в теме физических величин и приведены соотношения между ними. Рассмотрена классификация задач и указаны возможные пути их решения. Приведены примеры решения задач рассмотренных типов и двенадцать вариантов индивидуальных заданий.

Пособие может быть использовано на практических занятиях, при выполнении домашних заданий, а также при самостоятельном изучении курса физики.

1. ЗАКОН КУЛОНА. ТЕОРЕМА ГАУССА

1.1. Основные понятия и соотношения

Электрический заряд

В природе существует два вида электрических зарядов: положительные и отрицательные. Выбор названия был исторической случайностью.

Как положительные, так и отрицательные заряды состоят из равных элементарных зарядов величиной $|e| = 1,6021892 \cdot 10^{-19}$ Кл. Носителями таких зарядов являются микрочастицы. В частности, носителем элементарного заряда является электрон, а положительного – протон.

Экспериментально установлен закон сохранения заряда. *В изолированной системе полный электрический заряд, т. е. алгебраическая сумма положительного и отрицательного зарядов, остаётся постоянным.*

При этом под изолированной системой понимается такая, через границы которой не может проникнуть никакое другое вещество. Соответствующие исследования показали, что этот закон удовлетворяет условию релятивистской инвариантности, причём не только в том смысле, что вышеприведённая формулировка справедлива в любой заданной инерциальной системе отсчёта, но и в более строгом: расположенные в различных системах отсчёта наблюдатели, измеряя заряд, получают одно и то же число. Другими словами, полный электрический заряд изолированной системы является релятивистски инвариантным числом.

Отсюда следует, что величина заряда материального носителя *не зависит* от скорости его движения.

Непрерывное распределение заряда

В большинстве макроскопических явлений участвует громадное число элементарных зарядов. Так, на каждой из обкладок плоского конденсатора ёмкостью 10 мкФ при разности потенциалов 100 В содержится около $7 \cdot 10^{15}$ элементарных зарядов. При этом их дискретность никакого проявления не имеет. Поэтому можно считать, что заряд как бы непрерывно распределён на обкладках. Различают объёмную, поверхностную и линейную плотности зарядов.

Объёмной плотностью r называется отношение заряда ΔQ к объёму ΔV:

$$\rho = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \tag{1.1}$$

где e_i – элементарные заряды в объёме ΔV (с учётом их знака); ΔV – физически малый объём, но не бесконечно малый в математическом смысле. Физически малый – это значит, что его положение в пространстве достаточно точно характеризуется координатами какой-то точки, расположенной внутри него. Однако в этом объёме должно находиться такое достаточно большое количество элементарных зарядов, чтобы небольшое изменение их числа не приводило к существенному изменению плотности, вычисляемой по формуле (1.1).

Поверхностная плотность зарядов G определяется формулой

$$G = \frac{1}{\Delta S} \sum_{\Delta S} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \tag{1.2}$$

где ΔS – бесконечно малая площадь в физическом смысле.

Линейная плотность зарядов τ – это отношение заряда к бесконечно малой в физическом смысле длине:

$$\tau = \frac{1}{\Delta \ell} \sum_{\Delta \ell} e_i = \frac{\Delta Q}{\Delta \ell}. \tag{1.3}$$

Взаимодействие между покоящимися электрическими зарядами

Для точечных зарядов оно описывается экспериментальным законом Кулона, который в системе СИ для зарядов, находящихся в вакууме, имеет вид

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{12} \text{ и } \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{12}, \quad (1.4)$$

где q_1 и q_2 – величины взаимодействующих зарядов;

r – расстояние между ними;

$\vec{e}_{12}$ – единичный вектор, имеющий направление от заряда q_1 к заряду q_2;

$\vec{F}_{12}$ – сила, действующая на заряд q_2;

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная.

Уравнение (1.1), кроме всего прочего, выражает тот факт, что одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются и что сила, входящая в уравнение, является ньютоновской, т.е. что $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$.

Электрическое поле

Взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через электрическое поле, создаваемое каждым из зарядов в окружающем его пространстве. *Силовой характеристикой электрического поля является величина, называемая напряжённостью*. В данной точке она определяется как отношение силы, с которой поле действует на положительный заряд, помещённый в эту точку, к величине заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (1.5)$$

Из (1.5) следует, что направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Зная значение $\vec{E}$ в некоторой малой области пространства, можно без дальнейших исследований предсказать поведение любых зарядов в этой области. Отсюда следует основная задача: по величине и местонахождению зарядов определить значение $\vec{E}$ в разных точках пространства. Эта задача может быть решена либо с помощью принципа суперпозиции, либо с помощью теоремы Гаусса.

Принцип суперпозиции

Напряжённость любого числа точечных зарядов равна векторной сумме напряжённостей полей каждого из точечных зарядов при отсутствии всех других, т.е.

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \, . \tag{1.6}$$

Им удобно пользоваться при расчёте поля сравнительно небольшого числа дискретных зарядов. В случае непрерывного распределения зарядов расчёт поля становится громоздким и не всегда приводит к конечному результату. В этом случае удобнее воспользоваться *теоремой Гаусса*. Она формулируется следующим образом.

Поток вектора напряжённости электрического поля через любую замкнутую поверхность, т.е. интеграл $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ *по поверхности, равен алгебраической сумме зарядов, заключённых внутри этой поверхности, делённой на* ε_0:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i \, . \tag{1.7}$$

Поясним происхождение понятия «поток» на примере поля вектора скорости $\vec{v}$ текущей жидкости. Пусть скорость воды в реке меняется от одного места к другому, но является постоянной во времени величиной. Тогда, если $\vec{S}$ обозначает (в квадратных метрах) элемент площади, погружённой в воду, то произведение $\vec{v} \cdot \vec{S}$ равно количеству воды в кубических метрах в секунду (потоку воды), протекающей через этот элемент (рис. 1.1).

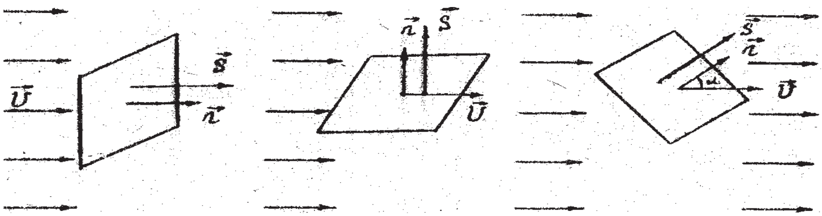


Рис. 1.1

Вектор $\vec{S}$ численно равен величине элемента площади и направлен перпендикулярно к нему. Его можно направить как в одну, так и в другую сторону. Обычно за положительное направление принимается направление наружу.

Теперь сложим потоки через все элементы поверхности. В результате получим скалярную функцию Φ, которая является потоком через всю поверхность:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \vec{v}_i \cdot \vec{S}_i \, .$$

Беспредельно уменьшая участки и увеличивая их число, перейдём от суммы к поверхностному интегралу:

$$\Phi = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \, .$$

В случае потока вектора $\vec{E}$ *он представляет собой* (если число силовых линий, пересекающих единичную площадку, перпендикулярную силовым линиям, численно равно значению вектора $\vec{E}$ в области расположения площадки) *просто полное число силовых линий, пересекающих данную поверхность.*

При наличии диэлектриков теорема Гаусса записывается в виде

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{n} q_i . \tag{1.8}$$

Вектор $\vec{D}$ *называется вектором электрического смещения*

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{p}, \tag{1.9}$$

где $\vec{E}$ – суммарная напряжённость полей, свободных и связанных зарядов в диэлектрике; $\vec{p}$ – поляризованность диэлектрика

$$\vec{p} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{\Delta V} \vec{p}_i , \tag{1.10}$$

где ΔV – физически бесконечно малый объём; $\sum_{\Delta v} \vec{p}_i$ – сумма электрических моментов, входящих в этот объём молекул диэлектрика.

Вектор $\vec{D}$ начинается и заканчивается на свободных зарядах. В точках без свободных зарядов он непрерывен, включая точки со связанными зарядами. Иными словами, *вектор* $\vec{D}$ *определяется только свободными зарядами, но при таком их распределении, которое возникает в присутствии диэлектрика.*

Граничные условия

Граничными условиями называется связь между векторами поля по разные стороны поверхности, разграничивающей две области. Пусть разделяемыми областями являются два диэлектрика с относительными диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Тогда для проекций векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ на направление нормали и касательной к поверхности раздела выполняются следующие соотношения:

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},\ E_{1\tau} = E_{2\tau}; \tag{1.11}$$

$$D_{1n} = D_{2n},\ \frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) следует, что силовые линии преломляются на границе раздела между диэлектриками. На рис. 1.2, *а* показан пример преломления силовых линий вектора $\vec{E}$ для случая, когда $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, а на рис. 1.2, *б* – вектора $\vec{D}$ для случая, когда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$.

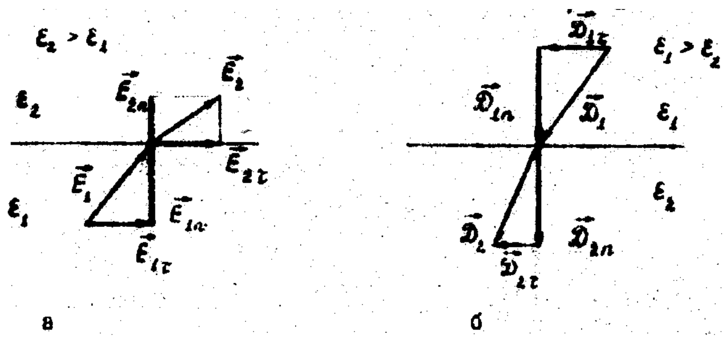


Рис. 1.2

1.2. Классификация задач и пути их решения

Задачи этой темы можно разделить на четыре типа:

1. Задачи, в которых рассматривается взаимодействие точечных зарядов.

2. Задачи, в которых рассматривается взаимодействие точечного и распределённого зарядов.

3. Задачи, в которых требуется определить напряжённость электрического поля по известной величине и распределению зарядов.

4. Задачи, в которых рассматривается взаимодействие распределённых зарядов.

Среди ***задач первого типа*** наибольший интерес, на наш взгляд, представляют задачи, в которых взаимодействующие точечные заряды находятся в состоянии равновесия. Они решаются путём применения закона Кулона и принципа суперпозиции. При этом последовательность операций должна быть следующей.

1. Сделать рисунок и провести идеализацию рассматриваемой в задаче физической системы.

2. Выбрать какой-либо заряд и указать на рисунке действующие на него силы.

3. Для выбранного заряда записать в векторной форме уравнение $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$, где $\vec{F}_i$ – силы, действующие на выбранный заряд.

4. Спроектировав полученное выше векторное уравнение на выбранное направление, получить уравнение в скалярной форме. За выбранное обычно принимается направление, вдоль которого силы действуют в противоположных направлениях.

5. Подставить в полученное выше скалярное уравнение для сил по закону Кулона и, исходя из геометрических соображений, преобразовать его таким образом, чтобы осталась только одна неизвестная величина.

6. Решить уравнение с одним неизвестным.

Задачи второго типа могут быть решены двумя методами. Первый состоит в применении закона Кулона и принципа суперпозиции. Второй заключается в нахождении любым путём напряжённости поля, создаваемого распределённым зарядом в точке, где находится точечный заряд q, и последующем вычислении силы из соотношения $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, т.е. по существу сводится к решению задачи *третьего типа*, а потому отдельно мы его рассматривать не будем.

При решении задач первым методом можно руководствоваться следующим алгоритмическим предписанием.

1. Сделать рисунок и провести идеализацию рассматриваемой в задаче физической системы.

2. Разделить заданный линейный, поверхностный или объёмный заряд на такие элементы, чтобы находящийся на них заряд соответственно $\tau \cdot d\ell, \sigma \cdot dS$ и $\rho \cdot dV$ можно было считать точечным.

3. Выбрать какой-либо из элементов и по закону Кулона записать выражение для силы, действующей с его стороны на заданный точечный заряд.

4. Указать вектор этой силы на рисунке и разложить его на перпендикулярную (по отношению к распределённому заряду) и параллельную составляющие. Для каждой из составляющих записать закон Кулона.

5. Выбрать переменную интегрирования величины и определить пределы, в которых она изменяется. При этом за переменную интегрирования следует принимать величину, определяющую положение выбранного элемента $\tau \cdot d\ell, \sigma \cdot dS$ и $\rho \cdot dV$ относительно точечного заряда.

6. Из геометрических соображений выразить величины, входящие в уравнения для перпендикулярной и параллельной составляющих, через известные и переменную интегрирования и полученный результат подставить в эти уравнения.

7. Интегрируя уравнения, полученные в пункте 6 по переменной интегрирования с учётом пределов, найденных в пункте 5, определить величины перпендикулярной и параллельной составляющих.

8. Суммируя векторно перпендикулярную и параллельную составляющие, определить силу, действующую на точечный заряд со стороны распределённого.

Задачи третьего типа могут быть решены тремя методами.

1. Путём использования принципа суперпозиции.
2. Применением теоремы Гаусса.
3. Путём вычисления потенциала с последующим нахождением напряжённости из уравнения $\vec{E} = -\mathrm{grad}\varphi$.

В принципиальном смысле все эти методы равноценны, в практическом – в зависимости от конкретных обстоятельств различны, так как связаны с неодинаковым объёмом вычислительной работы. Поскольку тема «Потенциал» рассматривается после этой, здесь мы ограничимся рассмотрением только первых двух методов.

Первый принципиально позволяет найти напряжённость поля любой системы зарядов. Практически он удобен при нахождении напряжённости поля, созданного системой относительно небольшого числа дискретных зарядов. При вычислении же напряжённостей полей, созданных распределёнными зарядами, его применение связано, как правило, с большим объёмом вычислений. Алгоритм решения задач этим методом показан на рис. 1.3.

Обратите внимание, что только что приведённый алгоритм решения задач третьего типа для случая распределённого заряда по существу тождествен алгоритму решения задач второго типа первым методом. Однако для вашего удобства мы привели его отдельно.

Второй метод, базирующийся на применении теоремы Гаусса, наиболее эффективен в тех случаях, когда заряженные тела обладают ярко выраженной симметрией. В общем же случае вычисления оказываются чрезвычайно сложными. Поэтому практически он применяется либо для вычисления напряжённостей полей заряженных тел симметричной формы (плоскости, шары, цилиндры), либо заряженных тел, форма которых может быть аппроксимирована телами симметричной формы.

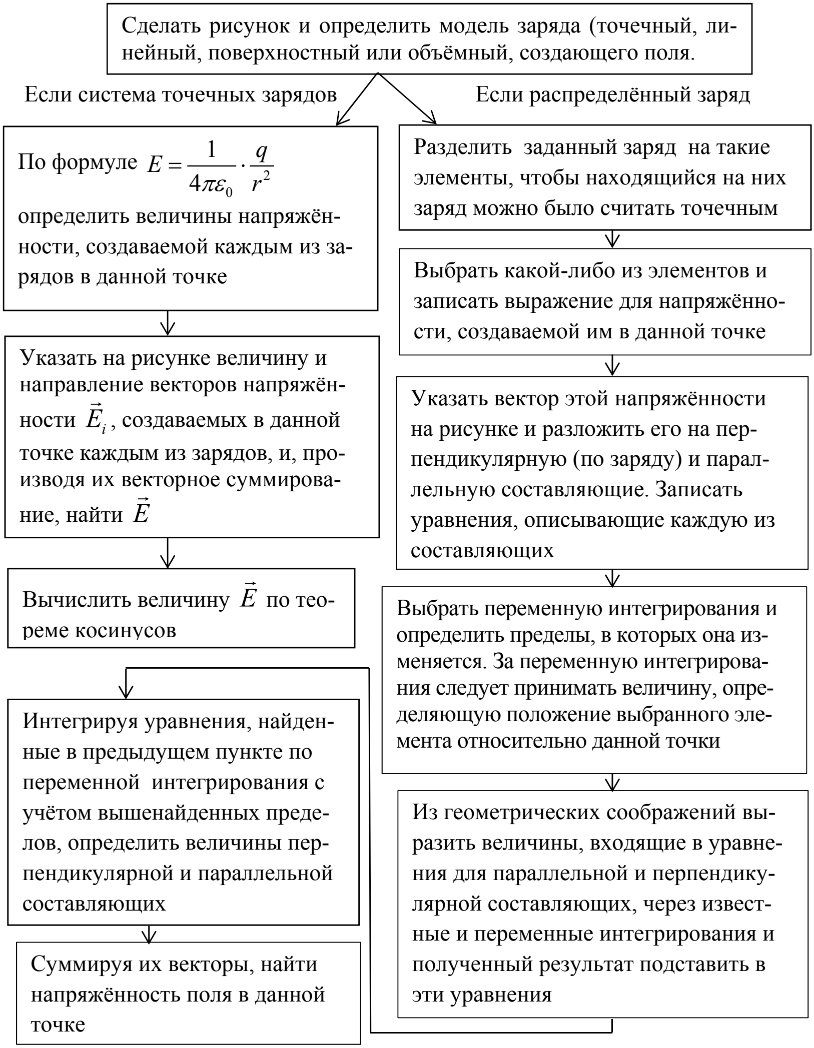


Рис. 1.3

При вычислении напряжённости поля этим методом можно использовать следующий алгоритм.

1. Сделать рисунок и указать на нём направление векторов напряжённости.

2. Построить на рисунке поверхность, через которую будет определяться поток вектора $\vec{E}$. При её построении следует руководствоваться правилом: элементы поверхности должны быть перпендикулярны либо параллельны линиям напряжённости.

3. Определить напряжённость поля $\vec{E}$ из формулы (1.7). При этом в левую часть следует подставлять произведение E на площадь поверхности, пересекаемой линиями напряжённости, а в правую – полный заряд, заключённый внутри выбранной поверхности. Полный заряд для случаев объёмного, поверхностного либо линейного зарядов определяется как произведение соответствующей плотности заряда на объём, поверхность или длину, заключённые внутри поверхности, через которую вычисляется поток.

В случае, если поле создаётся системой распределённых зарядов, то напряжённость поля, создаваемого каждым из распределённых зарядов, можно определить с помощью рассмотренных выше методов. Суммарную же напряжённость можно найти, используя принцип суперпозиции.

Конечные формулы для расчёта напряжённостей полей наиболее часто встречающихся форм источников приведены в табл. 1.1.

Задачи четвёртого типа, если поле однородно, решаются исходя из соотношения

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}, \tag{1.13}$$

где Q – величина данного распределённого заряда, а $\vec{E}$ – напряжённость поля, создаваемого другим распределённым зарядом (или зарядами), т. е. решение задачи в этом случае по существу сводится к решению задачи третьего типа.

Таблица 1.1

Геометрия источника поля	Напряжённость
Точка	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$
Бесконечная плоскость, равномерно заряженная с поверхностной плотностью σ	$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
Две разноимённо заряженные с поверх-ностной плотностью σ бесконечные плоскости (область между пластинами)	$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
Равномерно заряженный с линейной плотностью τ цилиндр радиусом $R(r\geq R, r<<h)$, где h – высота цилиндра	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2\pi}{r}$
Равномерно заряженный шар радиусом $R(r\geq R)$	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$
Равномерно объёмно-заряженный шар радиусом $R(r\leq R)$	$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^3}\cdot r$

Если поле неоднородно, использовать соотношение (1.13) нельзя. Задачи в этом случае решаются методом суперпозиции. Алгоритм решения может быть следующим:

1. Сделать рисунок и определить модели взаимодействующих зарядов.

2. Выбрать распределённый заряд, находящийся в поле, и распределённый заряд, создающий поле. Если один из зарядов конечен, то удобнее именно его рассматривать находящимся в поле.

3. Разделить находящийся в поле заряд на такие элементы, чтобы заряд каждого элемента можно было считать точечным. Выделить какой-либо элемент и по закону Кулона записать выражение для силы, действующей на него со стороны создающего поле заряда.

4. Выбрать переменную интегрирования и определить пределы её изменения. В качестве переменной интегрирования следует брать величину, от которой зависит сила, действующая на каждый элемент.

5. Указать на рисунке вектор силы, действующей на выделенный элемент, и разложить его на перпендикулярную и параллельную составляющие. Записать уравнения, описывающие каждую из составляющих, выразив в них неизвестные величины через известные и переменную интегрирования.

6. Интегрируя уравнения, найденные в п. 5 с учётом найденных выше пределов, определить величины перпендикулярной и параллельной составляющих.

7. Суммируя их векторно, определить силу взаимодействия распределённых зарядов.

В заключение отметим, что если в задачах рассматриваются явления электростатической индукции и поляризации, то система зарядов оказывается часто заданной неявно. В них, прежде чем перейти к решению с использованием приведённых выше алгоритмов, необходимо, используя знания об этих явлениях, установить заданную систему зарядов.

1.3. Примеры решения задач

Задача 1

В вершинах квадрата находятся равные отрицательные заряды q, а в центре – положительный заряд $Q = 2,2 \cdot 10^{-9}\,\text{Кл}$. Какой должна быть величина отрицательных зарядов, чтобы вся система находилась в состоянии равновесия?

Решение

Физическая система состоит из пяти взаимодействующих зарядов. Заряды, расположенные в вершинах, находятся в одинаковых условиях. Поэтому искомую величину можно определить исходя из условия равновесия любого, например q_1, заряда. В соответствии с принципом суперпозиции на этот заряд будет действовать каждый заряд независимо от действия остальных (рис. 1.4). Очевидно, q_1 будет находиться в равновесии, если сумма действующих на него сил равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0 . \qquad (1.14)$$

Так как силы $\vec{F}_1$ и равнодействующая трёх других сил $\vec{F}$ направлены вдоль одной прямой, то векторное равенство (рис. 1.4) можно заменить скалярной суммой:

$$F_1 - F = 0$$

$$\text{или } F = F_1 . \qquad (1.15)$$

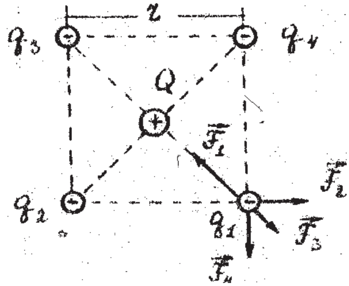


Рис. 1.4

Из геометрических соображений следует, что расстояние между q_1 и q_3 равно $\sqrt{2}\,r$, а между Q и q_1 – $\frac{\sqrt{2}}{2}r$.

С учётом этого, применяя закон Кулона, перепишем (1.15):

$$2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r^2} \cdot \cos 45^\circ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{\left(\sqrt{2} \cdot r\right)^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r\right)},$$

откуда

$$q = \frac{4Q}{2\sqrt{2} + 1} .$$

Подставляя численные значения, получим:

$$q = \frac{4 \cdot 2,2 \cdot 10^{-3}}{2\sqrt{2} + 1} \approx 2,3 \cdot 10^{-9}\,\text{Кл}.$$

Задача 2

Тонкий стержень длиной $\ell = 30$ см (рис. 1.5) несёт равномерно распределённый по длине заряд с линейной плотностью $\tau = 1$ мкКл/м. На расстоянии $r_0 = 20$ см от стержня находится заряд $q_1 = 10$ нКл. Заряд равноудалён от концов стержня. Определить силу взаимодействия точечного заряда с заряженным стержнем.

Решение

Физическая система состоит из взаимодействующих точечного и линейного зарядов. Для решения задачи применим принцип суперпозиции. Разделим стержень на столь малые элементы $d\ell$, чтобы заряд $dQ = \tau \cdot d\ell$ можно было рассматривать как точечный. Тогда сила взаимодействия между зарядами q_1 и dQ может быть определена по закону Кулона:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot \tau \cdot d\ell}{r^2}, \qquad (1.16)$$

где r – расстояние от выделенного элемента до заряда q_1.

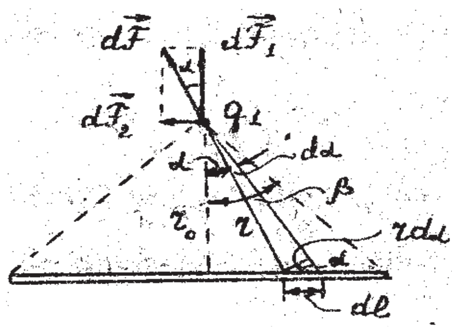


Рис. 1.5

Из рис. 1.5 следует, что

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha} \quad \text{и} \quad d\ell = \frac{r \cdot d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Подставив эти выражения в (1.16), получим:

$$dF = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot d\alpha. \tag{1.17}$$

Разложим далее $d\vec{F}$ на нормальную $d\vec{F}_1$ и тангенциальную $d\vec{F}_2$ составляющие. Из рис. 1.5 видно, что

$$dF_1 = dF \cdot \cos\alpha = \frac{q_1 \cdot \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha;$$

$$dF_2 = dF \cdot \sin\alpha = \frac{q_1 \cdot \tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha.$$

Очевидно, что для нахождения силы необходимо проинтегрировать последние выражения. Поскольку положение выделенного заряда на стержне определяется углом α, этот угол и следует взять в качестве переменной интегрирования. Из рис. 1.5 видно, что α меняется в пределах от $-\beta$ до $+\beta$. С учётом этого получим:

$$F_1 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\beta. \tag{1.18}$$

В силу симметрии расположения заряда q_1 относительно стержня интегрирование второго выражения даёт нуль:

$$F_2 = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\left(\cos\beta - \cos\beta\right) = 0.$$

Таким образом, сила, действующая на заряд q_1, будет:

$$F = F_1 = \frac{q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\beta. \tag{1.19}$$

Из рис. 1.5 видно, что

$$\sin\beta = \frac{\frac{\ell}{2}}{\sqrt{r_0^2 + \frac{\ell^2}{4}}} = \frac{\ell}{\sqrt{4r_0^2 + \ell^2}}. \quad (1.20)$$

Подставив (1.20) в (1.19), получим:

$$F = \frac{q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \frac{\ell}{\sqrt{4r_0^2 + \ell^2}}. \quad (1.21)$$

Вычислив (1.21), будем иметь: $F = 540$ мкН.

Задача 3

Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 30$ нКл и $q_2 = -10$ нКл. Расстояние между зарядами $d = 20$ см.

Определить напряжённость электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 15$ см от первого и на расстоянии $r_2 = 10$ см от второго зарядов.

Решение

Физическая система состоит из двух точечных зарядов и созданного ими поля (рис. 1.6).

Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции, согласно которому напряжённость поля в искомой точке $\vec{E}$ может быть найдена как векторная сумма напряжённостей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

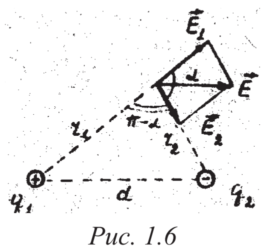


Рис. 1.6

Напряжённость, создаваемая первым зарядом:

$$E_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}; \tag{1.22}$$

вторым:

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \tag{1.23}$$

Вектор $\vec{E}_1$ направлен по силовой линии от заряда q_1, так как заряд q_1 положителен; вектор $\vec{E}_2$ направлен к заряду q_2, так как заряд q_2 отрицателен.

Абсолютное значение E найдём по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}, \tag{1.24}$$

где α – угол между векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, который с использованием теоремы косинусов может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d:

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}. \tag{1.25}$$

Подставляя (1.22) и (1.23) в (1.24), получим:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1 \cdot q_2}{r_1^2 \cdot r_2^2} \cdot \cos\alpha}. \tag{1.26}$$

Вычислив результат, будем иметь

$$E = 1,67 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

Задача 4

Рассчитать напряжённость поля прямой бесконечной нити, равномерно заряженной с линейной плотностью τ, в точке A, удалённой от нити на расстояние r_0.

Решение

Физическая система состоит из бесконечного линейно распределённого заряда и созданного им поля. Решим задачу двумя методами. Применим сначала теорему Гаусса. В силу симметрии вектор напряжённости в любой точке нормален цилиндрической поверхности, проходящей через эту точку и имеющей ось симметрии, совпадающую с нитью. Поэтому в качестве замкнутой поверхности возьмём цилиндр длиной ℓ с осью симметрии, совпадающей с нитью, боковая поверхность которого проходит через точку *A* (рис. 1.7). Поток вектора $\vec{E}$ через торцы цилиндра равен нулю, через боковую поверхность $\Phi_E = 2\pi r_0 \ell E$. Полный заряд, расположенный внутри цилиндра, $Q = \tau \cdot \ell$. С учётом этого по теореме Гаусса будем иметь:

$$2\pi r_0 \ell E = \frac{\tau \ell}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 \cdot r_0}. \qquad (1.27)$$

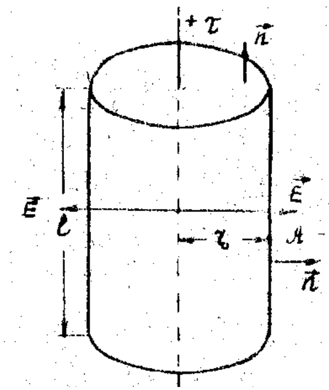


Рис. 1.7

Теперь применим принцип суперпозиции. Разделим нить на столь малые элементы $d\ell$, чтобы заряд $dQ = \tau d\ell$, находящийся на каждом таком элементе, можно было считать точечным. Выберем один из элементов (рис. 1.8). В точке A он создаёт напряжённость

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\tau \cdot d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \tag{1.28}$$

где r – расстояние от выбранного элемента до точки A.

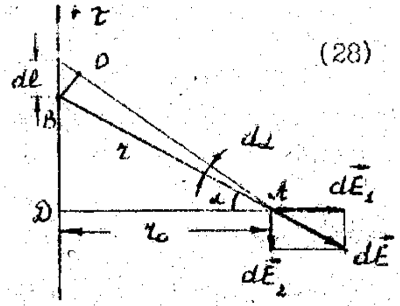


Рис. 1.8

Разложим вектор $d\vec{E}$ на нормальную $d\vec{E}_1$ и тангенциальную $d\vec{E}_2$ составляющие. На рис. 1.8 видно, что

$$dE_1 = dE \cdot \cos\alpha = \frac{\tau \cdot d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \cos\alpha\,; \tag{1.29}$$

$$dE_2 = dE \cdot \sin\alpha = \frac{\tau \cdot d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \sin\alpha\,. \tag{1.30}$$

Поскольку положение выбранного точечного заряда на нити определяется углом α, возьмём его в качестве переменной интегрирования. В связи с этим выразим входящие в (1.29) и (1.30) величины $d\ell$ и r через r_0 и α.

Из треугольника ADB находим $r = \dfrac{r_0}{\cos\alpha}$. Из треугольника BCO следует:

$$d\ell = \frac{|BO|}{\cos\alpha} = \frac{r_0 \cdot d\alpha}{\cos^2\alpha}, \text{ так как } |BO| = r \cdot d\alpha = \frac{r_0}{\cos\alpha} \cdot d\alpha\,.$$

Подставляя найденные значения в уравнения (1.29) и (1.30), получим:

$$dE_1 = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha\,; \qquad (1.31)$$

$$dE_2 = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha\,. \qquad (1.32)$$

Интегрируя (1.31) и (1.32) в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, будем иметь:

$$E_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0};$$

$$E_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \cdot \sin\alpha \cdot d\alpha = 0.$$

Таким образом, окончательно $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}$, что совпадает с выражением, полученным с помощью теоремы Гаусса.

Нетрудно видеть, что в данном случае вычисления по принципу суперпозиции оказались более трудоёмкими, чем при использовании теоремы Гаусса. Однако существуют задачи, в которых всё наоборот.

Задача 5

Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными заряженными плоскостями с поверхностными плотностями заряда $\sigma_1 = 0{,}4$ мкКл/м^2 и $\sigma_2 = 0{,}1$ мкКл/м^2. Определить напряжённость электрического поля, созданного этими заряженными плоскостями.

Решение

Физическая система состоит из двух заряженных плоскостей и создаваемого ими поля. Для решения задачи воспользуемся принципом суперпозиции, согласно которому поля, создаваемые каждой плоскостью, накладываются друг на друга. Напряжённость поля, создаваемого, к примеру, первой плоскостью, найдём по теореме Гаусса. Для этого построим цилиндр с образующими, перпендикулярными плоскости, и основаниями величиной ΔS (рис. 1.9) и применим к нему теорему Гаусса. Поток через боковую часть поверхности будет отсутствовать, поскольку она параллельна вектору $\vec{E}$. Для оснований E_n совпадает с $\vec{E}$. Следовательно, суммарный поток через поверхность равен $2E_1\Delta S$. Внутри поверхности заключён заряд $\sigma_1\Delta S$. Согласно теореме Гаусса, должно выполняться условие

$$2E_1 \cdot \Delta S = \frac{\sigma_1 \cdot \Delta S}{\varepsilon_0},$$

из которого

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}.$$

Аналогично

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

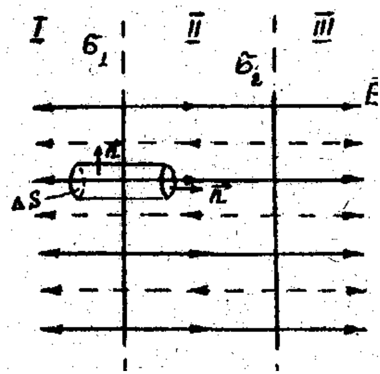


Рис. 1.9

Плоскости делят всё пространство на три области: I, II, III. Как видно из рис. 1.9, в первой и третьей областях электрические силовые линии обоих полей направлены в одну сторону, во второй – в противоположные. В соответствии с этим

$$E^{(I)} = E^{(III)} = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2};$$

$$E^{(II)} = \left| E_1 - E_2 \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|}{2}.$$

Произведя вычисления, получим $E^{(I)} = 2,83 \cdot 10^4$ В/м, $E^{(II)} = 1,7 \cdot 10^4$ В/м.

Задача 6

Отрезок длиной $\ell = 40$ см, равномерно заряженный с линейной плотностью $\tau_1 = +1,5 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, и бесконечная прямая нить, заряженная с линейной плотностью $\tau_2 = +4 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, расположены в одной плоскости перпендикулярно друг другу на расстоянии $r_0 = 20$ см (рис. 1.10). Определить силу взаимодействия между ними.

Решение

В физическую систему включим два тела: нить и отрезок. Физическое явление заключается в воздействии поля на заряд отрезка. Поскольку поле нити неоднородно, а значит, на различные (но равные по длине) участки отрезка ℓ действуют различные силы, использовать для определения силы формулу $F = Q \cdot E = \tau_1 \ell E$ нельзя.

Для нахождения силы применим принцип суперпозиции. Разделим отрезок ℓ на столь малые части dx, чтобы заряд, находящийся на них, $dQ = \tau_1 \cdot dx$, можно было считать точечным. Тогда на произвольно выбранный заряд dQ будет действовать сила

$$dF = E \cdot dQ = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{2\pi\varepsilon_0 x} \cdot dx\,, \tag{1.33}$$

где x – расстояние заряда dQ от нити; E – напряжённость поля, создаваемого нитью (см. задачу 4).

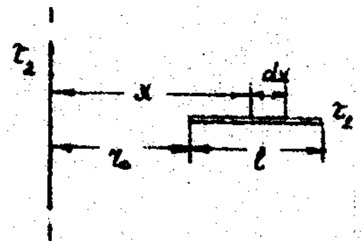


Рис. 1.10

Сила, действующая на каждый элемент отрезка, зависит от расстояния x. Поэтому x выберем в качестве переменной интегрирования. Из рис. 1.10 следует, что x изменяется в пределах от r_0 до $r_0 + \ell$. Интегрируя (1.33) по x, получим:

$$F = \int_{r_0}^{r_0+\ell} \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(1 + \frac{\ell}{r_0}\right). \tag{1.34}$$

Подстановка числовых значений даёт $F = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\,\text{Н}$.

2. ПОТЕНЦИАЛ. РАБОТА. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

2.1. Основные понятия и соотношения

Потенциалом электрического поля называется скалярная величина φ, равная отношению потенциальной энергии поля E_p к величине пробного заряда q_0:

$$\varphi = \frac{E_p}{q_0}. \qquad (2.1)$$

Связь между потенциалом электрического поля φ и напряжённостью поля $\vec{E}$ определяется соотношениями:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi; \qquad (2.2)$$

$$\varphi = -\int\left(\vec{E}, d\,\vec{r}\right), \qquad (2.3)$$

где ∇ – дифференциальный оператор вида

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

Соотношение (2.2) позволяет найти поле $\vec{E}$ посредством дифференцирования φ по координатам x, y, z радиуса-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения. Аналогично соотношение (2.3) позволяет найти потенциал поля φ посредством интегрирования $\vec{E}$ по $\vec{r}$ до точки наблюдения. Постоянная интегрирования в (2.3) при этом выбирается так, чтобы потенциал φ принимал определённое значение в заданной точке пространства. Для поля, создаваемого конечной системой зарядов, потенциал φ принимается равным нулю на бесконечности. В соответствии с последним требованием потенциал точечного заряда q в однородной и изотропной среде с диэлектрической проницаемостью ε можно определить выражением

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}, \qquad (2.4)$$

где $r = \left|\vec{r}\right|$.

Следствием соотношений (2.2), (2.3) является условие ортогональности силовых линий поля эквипотенциальным поверхностям, уравнение которых определяется выражением

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}.$$

Соотношения (2.2), (2.3) позволяют также сформулировать *принцип суперпозиции, согласно которому потенциал электрического поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности*. По этой причине потенциал системы из N точечных зарядов q_i можно определить выражением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}, \tag{2.5}$$

где i – номер заряда и r_i – расстояние от i-го заряда до точки наблюдения.

Из формулы (2.1) следует, что заряд q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает *потенциальной энергией*

$$E_p = q\varphi. \tag{2.6}$$

Если потенциал φ создаётся точечным зарядом q', расположенным на расстоянии r от заряда q, то формула (2.6) будет определять *энергию взаимодействия двух зарядов*

$$E_p = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \tag{2.7}$$

Нетрудно показать, что энергия взаимодействия системы, состоящей из N точечных зарядов q_i, будет

$$E_p = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \tag{2.8}$$

где r_{ij} – расстояние между i-м и j-м зарядом. Вводя обозначение

$$\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}},$$

эту энергию можно также записать в виде

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi_i\,. \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) позволяет представить потенциальную энергию заряженного проводника в форме

$$E_p = \frac{1}{2}q\varphi\,, \qquad (2.10)$$

где q – заряд проводника; φ – его потенциал.

Заметим, что уединённые заряженные проводники можно охарактеризовать понятием *ёмкости*, которая определяется как отношение заряда проводника q к его потенциалу φ:

$$C = \frac{q}{\varphi}\,. \qquad (2.11)$$

Данное понятие позволяет выразить энергию заряженного проводника через q и C либо через φ и C:

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}\,. \qquad (2.12)$$

Систему двух разноимённо заряженных проводников (конденсатор) с зарядами q и $-q$ можно охарактеризовать понятием взаимной ёмкости (или просто ёмкости), которая определяется как отношение заряда проводника q к разности потенциалов $U = \varphi_1 - \varphi_2\left(\varphi_1 > \varphi_2\right)$ между проводниками:

$$C = \frac{q}{U}\,. \qquad (2.13)$$

По аналогии с предыдущим это понятие позволяет выразить *потенциальную энергию конденсатора*

$$E_p = \frac{qU}{2} \tag{2.14}$$

через q и C либо через U и C:

$$E_p = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \tag{2.15}$$

Полученные выше выражения для энергии электрического поля можно записать и в несколько иной форме, а именно как интеграл по объёму V:

$$E_p = \int w \cdot dV \tag{2.16}$$

от плотности энергии поля

$$w = \frac{\vec{E} \cdot \vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_p^2}{2}, \tag{2.17}$$

где $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ – вектор электрического смещения.

Такая форма записи энергии поля является более общей по сравнению с приведёнными выше выражениями для E_p.

Механические характеристики электрических систем определяются законами динамики. Например, работа электрических сил A по перемещению заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 будет равна разности потенциальных энергий $E_{p_1} = q\varphi_1$ и $E_{p_2} = q\varphi_2$:

$$A = E_{p_1} - E_{p_2} = q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right). \tag{2.18}$$

Подобным образом определяются и другие механические характеристики.

В заключение приведём табл. 2.1, в которой собран ряд формул, встречающихся в задании, связанных с вычислением потенциала и потенциальной энергии электрического поля.

Таблица 2.1

Физическая величина	Формула	Обозначения
Связь между E и φ в одномерном случае	$E = -\dfrac{d\varphi}{dx}$ $\varphi = -\int E_p dx + \text{const}$	x – координата оси; E – составляющая поля по оси X
Связь между E и φ в трёхмерном сферически-симметричном случае	$E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$ $\varphi = -\int E_p dr + \text{const}$	r – расстояние от начала координат; E – радиальная составляющая поля
Потенциал заряженной плоскости	$E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$ $\varphi = -\int E_p dr + \text{const}$	σ – поверхностная плотность заряда; x – расстояние от плоскости
Потенциал заряженной нити	$\varphi = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \ln r + \text{const}$	τ – линейная плотность заряда; r – расстояние от нити
Потенциал заряженной металлической сферы	$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}, r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, r > R \end{cases}$	q – заряд сферы; r – расстояние от центра сферы; R – радиус сферы
Энергия заряженной металлической сферы	$E_p = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0 R}$	q – заряд сферы; R – радиус сферы
Энергия плоского конденсатора	$E_p = \dfrac{q^2 d}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$	q – заряд конденсатора; d – расстояние между обкладками; S – площадь обкладок
Ёмкость сферического конденсатора	$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \dfrac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$	R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок
Ёмкость плоского конденсатора	$C = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$	S – площадь обкладок; d – расстояние между обкладками

2.2. Классификация задач и пути их решения

Встречающиеся в данном разделе задачи можно разделить на три типа:

1. Задачи, связанные с вычислением электрического поля по заданному распределению потенциала (и обратные задачи).

2. Задачи, связанные с нахождением потенциала по заданному распределению зарядов (и обратные задачи).

3. Задачи, в которых рассматриваются вопросы вычисления потенциальной энергии, работы и электрических сил в системах заряженных тел.

Задачи *первого типа* решаются на основе прямого использования соотношений (2.2), (2.3).

Задачи *второго типа* допускают решение двумя способами. *Первый способ* используется для расчёта потенциала протяжённых заряженных тел неправильной формы и заключается в следующем. Тело разбивается на элементарные объёмы dV, заряд которых $dq = \rho dV$, где ρ – плотность заряда. После этого потенциал φ определяется как сумма потенциалов элементарных зарядов dq с помощью формулы

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\frac{\rho}{r}dV\,, \tag{2.19}$$

где r – расстояние от элементарного объёма dV до точки наблюдения.

Аналогично определяются потенциалы тел, заряд которых распределён по поверхности или по линиям.

Второй способ заключается в первоначальном нахождении напряжённости поля E и лишь затем потенциала φ по формуле (2.3). В основном он применим для тел, обладающих элементами симметрии. При решении задач как первым, так и вторым способом следует привести рисунок с указанием расстояний, области, по которой проводится интегрирование, направления поля и т.д. Обратные задачи встречаются значительно реже. Поэтому останавливаться на них не будем. Отметим только, что решение этих задач, как правило, основано на соотношениях, связывающих плотность заряда с локальным значением потенциала в данной точке.

Задачи *третьего типа* решаются следующим образом. Сначала рассчитывается потенциальная энергия системы. В том случае, если рассматриваются проводящие тела, для вычисления энергии используется формула (2.9) либо следующие из неё формулы (2.10), (2.12), (2.14) и (2.15).

При вычислении энергии непроводящих тел более удобным представляется использование формул (2.16), (2.17), требующих знания значений напряжённости поля во всех точках пространства. После нахождения потенциальной энергии рассматриваются выражения для работы и сил. Работа электрических сил по изменению состояния системы определяется как разность потенциальной энергии начального состояния системы и конечного (при условии замкнутости системы). Электрические силы, действующие между телами, определяются при этом как взятые с обратным знаком производные от потенциальной энергии по соответствующим расстояниям между телами.

2.3. Примеры решения задач

Задача 1

Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть диэлектрик, расположенный между обкладками плоского конденсатора, для двух случаев: когда заряд на обкладках является постоянным и равным q и когда напряжение между обкладками поддерживается постоянным и равным U. Площадь пластин конденсатора и расстояние между пластинами равны соответственно S и d. Толщина диэлектрика равна d_1, а его диэлектрическая проницаемость ε.

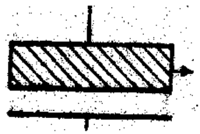


Рис. 2.1

Решение

Рассмотрим сначала *первый случай*, когда заряд q на обкладках является постоянным. Работа внешних сил A по удалению диэлектрика из конденсатора равна взятой с обратным знаком работе электрических сил $A_{эл}$.

Согласно закону сохранения энергии, работу электрических сил $A_{эл}$ можно определить как разность между начальной энергией конденсатора $E_{p_1} = \dfrac{qU_1}{2}$ и конечной $E_{p_2} = \dfrac{qU_2}{2}$,

где U_1 и U_2 – соответственно начальное и конечное напряжение на конденсаторе (т.е. напряжение с диэлектриком и без диэлектрика).

Следовательно,

$$A = E_{p_2} - E_{p_1} = \frac{q}{2}\left(U_2 - U_1\right). \tag{2.20}$$

Чтобы найти U_1 и U_2, воспользуемся известными выражениями для напряжённости электрического поля E между обкладками плоского конденсатора:

$$E = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} & \text{в диэлектрике,} \\ \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & \text{вне диэлектрика,} \end{cases} \tag{2.21}$$

где $\sigma = \dfrac{q}{S}$ – поверхностная плотность заряда.

Подставляя данные выражения в формулу для U:

$$U = \int_0^d E \cdot dx, \tag{2.22}$$

где направление оси X выбирается ортогональным плоскости обкладок, получим:

$$U_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(d - d_1 + \frac{d_1}{\varepsilon}\right), \tag{2.23}$$

$$U_2 = \frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0}, \tag{2.24}$$

и, как следствие,

$$A = \frac{q^2 d_1 (\varepsilon - 1)}{\varepsilon_0 \varepsilon S}. \tag{2.25}$$

Рассмотрим теперь *второй случай*, когда напряжение на обкладках U поддерживается постоянным (например, за счёт внешнего источника питания). Как и в предыдущем случае, работа A по удалению диэлектрика из конденсатора будет равна взятой с обратным знаком работе электрических сил $A_{эл}$. Однако последняя в данном случае будет определяться несколько иным образом:

$$A_{эл} = E_{p_1} - E_{p_2} + A_{q_{эл}}, \tag{2.26}$$

где $E_{p_1} = \frac{q_1 U}{2}$ – начальная энергия конденсатора; $E_{p_2} = \frac{q_2 U}{2}$ – конечная энергия конденсатора; $A_{q_{эл}} = U(q_2 - q_1)$ – работа по переносу электрического заряда от источника питания, а q_1 и q_2 – соответственно начальный и конечный заряд на конденсаторе.

Следовательно,

$$A = E_{p_1} - E_{p_2} = \frac{U}{2}(q_1 - q_2). \tag{2.27}$$

Определяя заряды q_1 и q_2 из выражения для U, которые по аналогии с предыдущим случаем можно записать в виде

$$U = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\left(d - d_1 + \frac{d_1}{\varepsilon}\right), \tag{2.28}$$

$$U = \frac{\sigma_2 d}{\varepsilon_0}, \qquad (2.29)$$

где $\sigma_1 = \frac{q_1}{S}$ и $\sigma_2 = \frac{q_2}{S}$, получим:

$$q_1 = \frac{\varepsilon_0 US}{d - d_1 + \frac{d_1}{\varepsilon}}; \qquad (2.30)$$

$$q_2 = \frac{\varepsilon_0 US}{d}; \qquad (2.31)$$

и, как следствие,

$$A = \frac{\varepsilon_0 U^2 S}{2}\left(\frac{1}{d - d_1 + \frac{d_1}{\varepsilon}} - \frac{1}{d}\right). \qquad (2.32)$$

Подобным образом решаются и другие задачи, в которых требуется найти работу *A* по изменению состояния системы. Сначала, как правило, находится начальная энергия системы E_{p_1}, а затем конечная E_{p_2}. После этого работа *A* определяется либо как $A = E_{p_2} - E_{p_1}$ (в случае замкнутых систем), либо как $A = E_{p_1} - E_{p_2}$ (в случае незамкнутых систем, т. е. систем, связанных с внешними источниками питания).

Задача 2

Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов $q_1 = q_3 = q$ и $q_2 = q_4 = -q$, расположенных в вершинах ромба со стороной *a* и острым углом $\alpha = 60^\circ$, как это показано на рис. 2.2.

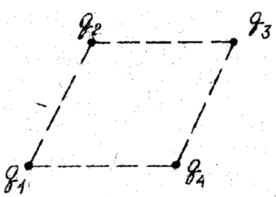


Рис. 2.2

Решение

Данная задача решается непосредственно на основе общей формулы для энергии системы точечных зарядов.

$$E_p = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_1 q_4}{r_{14}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} + \frac{q_2 q_4}{r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{r_{34}}\right), \quad (2.33)$$

где r_{ij} – расстояние между i-м и j-м зарядом. Подставляя в приведённую формулу для энергии соответствующие значения q_i, r_{ij} и учитывая, что

$$r_{12} = r_{14} = r_{23} = r_{34} = a; \; r_{13} = 2a\cos\frac{\alpha}{2},$$

получим:

$$E_p = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad (2.34)$$

Сходным образом решаются и другие задачи.

Задача 3

Тонкое проволочное кольцо радиусом $r = 100$ мм имеет электрический заряд $q = 50$ мкКл. Каково будет приращение силы, растягивающей проволоку, если в центре кольца поместить точечный заряд $q_0 = 7{,}0$ мкКл?

Решение

Данная задача решается в два этапа: сначала ищется приращение энергии E_p при помещении в центр кольца заряда q_0, а затем – приращение растягивающей силы ΔF по формуле

$$\Delta F = -\frac{\partial \Delta E_p}{\partial \ell}, \quad (2.35)$$

где $\ell = 2\pi r$ – длина кольца.

Приращение энергии определяется соотношением

$$\Delta E_p = q_0 \varphi\,, \tag{2.36}$$

где φ – потенциал, создаваемый зарядом кольца в центре.

Для нахождения φ разобьём кольцо на элементарные отрезки длиной $\delta \ell$ и зарядом

$$\delta q = \frac{q}{\ell}\delta \ell\,. \tag{2.37}$$

Суммируя затем потенциалы, создаваемые каждым элементарным зарядом δq в центре кольца, получим:

$$\varphi = \sum \frac{\delta q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,. \tag{2.38}$$

В результате будем иметь:

$$\Delta E_p = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q_0 q}{2\varepsilon_0 \ell}\,. \tag{2.39}$$

Продифференцировав приведённое выражение для ΔE_p по ℓ, найдём:

$$\Delta F = \frac{q_0 q}{2\varepsilon_0 \ell^2} = \frac{q_0 q}{8\pi^2 \varepsilon_0 r^2} = 50\,\text{Н}\,. \tag{2.40}$$

Настоящая процедура вычисления ΔF пригодна и для других электростатических задач, в которых ищутся силовые характеристики систем.

Задача 4

Потенциал электрического поля имеет вид $\varphi = \alpha\left(xy - z^2\right)$, где α – постоянная. Найти проекцию напряжённости электрического поля в точке $M\left\{1, 2 - 3\right\}$ на направление вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{k}$.

Решение

Найдём сначала напряжённость электрического поля $\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z$. Учитывая, что компоненты поля E_x, E_y, E_z связаны с φ соотношениями

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\alpha y; \tag{2.41}$$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha x; \tag{2.42}$$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -2\alpha z, \tag{2.43}$$

получим:

$$\vec{E} = \alpha\left(-y\vec{i} - x\vec{j} + 2z\vec{k}\right). \tag{2.44}$$

В точке *M* вектор $\vec{E}$ определяется выражением

$$\vec{E} = \alpha\left(-2\vec{i} - \vec{j} - 6\vec{k}\right). \tag{2.45}$$

Следовательно, его проекция в данной точке на направление вектора $\vec{\alpha}$ будет

$$E_a = \frac{\vec{E} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = -\frac{19}{\sqrt{10}}\alpha \approx -6\alpha. \tag{2.46}$$

Задача 5

Между пластинами накоротко замкнутого плоского конденсатора, показанного на рис. 2.3, находится металлическая пластина с зарядом *q*. Пластину переместили на расстояние ℓ. Какой заряд Δq прошёл при этом по закорачивающему проводнику? Расстояние между пластинами конденсатора равно *d*.

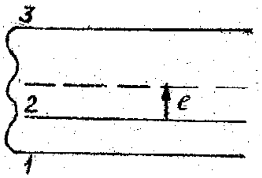


Рис. 2.3

Решение

Помещение заряженной пластины *2* между обкладками конденсатора *1* и *3* вызовет появление индуцированных зарядов на каждой из пластин конденсатора (одинаковых по величине, но противоположных по знаку). Очевидно, что для нахождения заряда Δq, который будет проходить по закорачивающему конденсатор проводнику при перемещении пластины *2*, достаточно найти заряды на одной из пластин конденсатора, например первой, в начальном положении пластины *2* и конечном. Обозначим эти заряды соответственно через q_0 и $q_0 + \Delta q$ и воспользуемся для их определения условием равенства потенциала пластины *1* потенциалу пластины *3*. Это условие можно записать так:

$$U_{12} + U_{23} = 0, \tag{2.47}$$

где U_{12} – разность потенциалов между второй и первой пластиной, а U_{23} – разность потенциалов между третьей и второй пластиной.

Выражая в этом условии U_{ij} через напряжённость электрического поля E_{ij} и расстояние d_{ij} между *j*-й и *i*-й пластиной, получим:

$$E_{12}d_{12} + E_{23}d_{23} = 0\,. \tag{2.48}$$

Подставляя в последнее соотношение значения для d_{ij} и E_{ij} (выраженные через заряд на пластинах) в начальном и конечном положении пластины *2*, будем иметь систему равенств:

$$\frac{1}{\varepsilon_0 S}\left[\left(q_0 - \frac{q}{2}\right)d_0 + \left(q_0 + \frac{q}{2}\right)(d - d_0)\right] = 0; \tag{2.49}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0 S}\left[\left(q_0 + \Delta q - \frac{q}{2}\right)(d_0 + \ell) + \left(q_0 + \Delta q + \frac{q}{2}\right)(d - d_0 - \ell)\right] = 0, \tag{2.50}$$

где S – площадь пластин и d_0 – расстояние между пластиной *2* и пластиной *1* до перемещения пластины *2*.

Выражая из данных уравнений Δq, получим:

$$\Delta q = q\frac{\ell}{d}. \qquad (2.51)$$

Задача 6

Какую работу против сил электрического поля надо совершить, чтобы перенести диполь с электрическим моментом $\vec{P}_e$ из положения *1*, где напряжённость поля равна E_1, в положение *2* с напряжённостью E_2 (как это показано на рис. 2.4) и повернуть его при этом на 90°?

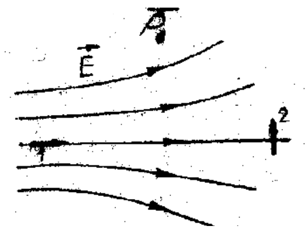


Рис. 2.4

Решение

Работа сил электрического поля A_{12} по перемещению диполя из положения *1* в положение *2* определяется как разность между потенциальной энергией диполя E_{p_1} в положении *1* и потенциальной энергией диполя E_{p_2} в положении *2*, т.е.

$$A_{12} = E_{p_1} - E_{p_2}. \qquad (2.52)$$

Учитывая, что потенциальная энергия диполя $\vec{P}_e$ во внешнем электрическом поле $\vec{E}$ определяется выражением

$$E_p = -\vec{P}_e \cdot \vec{E} = -P_e E \cdot \cos\Theta, \qquad (2.53)$$

где Θ – угол между векторами $\vec{P}_e$ и $\vec{E}$, будем иметь:

$$E_{p_1} = -P_e E_1 ; \tag{2.54}$$

$$E_{p_2} = 0 , \tag{2.55}$$

и, как следствие,

$$A_{12} = -P_e E_1 . \tag{2.56}$$

Работа против сил электрического поля по перемещению диполя равна A_{12}. Поэтому

$$A = P_e E_1 . \tag{2.57}$$

Существенно, что эта работа не зависит от напряжённости электрического поля в точке *2*.

Задача 7

Определить напряжённость электрического поля, потенциал которого зависит от координат *x*, *y* по закону: $\varphi = axy$, где *a* – постоянная. Изобразить примерный вид этого поля с помощью вектора $\vec{E}$ (в плоскости *x*, *y*).

Решение

Воспользуемся формулами, связывающими компоненты E_x и E_y вектора $\vec{E}$ с производными по координатам *x* и *y* потенциала φ. Будем иметь:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ay ; \tag{2.58}$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -ax , \tag{2.59}$$

и, как следствие,

$$\vec{E} = -a\left(\vec{i}y + \vec{j}x\right). \tag{2.60}$$

Перейдём теперь к графическому построению поля $\vec{E}$. Изобразим пунктиром на плоскости x, y эквипотенциальные линии

$$xy = \mathrm{const} \qquad (2.61)$$

и проведём сплошные линии, ортогональные эквипотенциальным. Последние и будут являться линиями поля E. Направление поля нетрудно найти, рассмотрев, как меняется вектор $\vec{E}$ при изменении y и $x = \mathrm{const}$ (или при изменении x и $y = \mathrm{const}$). На рис. 2.5 направление поля указано для случая $a > 0$.

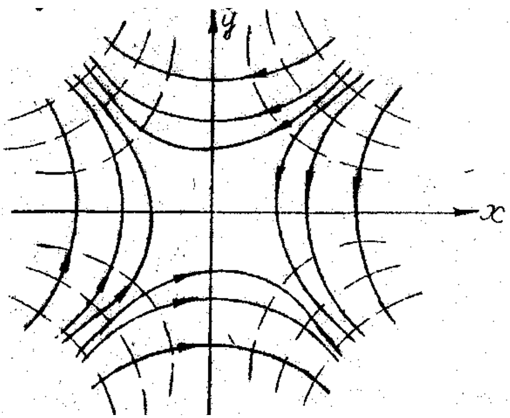


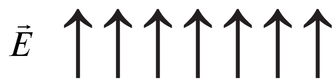
Рис. 2.5

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

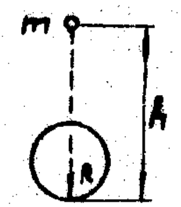
3.1. Закон Кулона. Теорема Гаусса

Вариант 1

1. Возможно ли существование поля, изображённого на рисунке силовыми линиями?



2. В сферический металлический сосуд радиусом *R*, в верхней части которого имеется небольшое отверстие, с высоты *h* падают заряженные капельки ртути. Масса каждой капли *m*, заряд *Q*. Каким будет номер *n* последней капли, которая ещё может попасть в сосуд? Сопротивлением воздуха, напряжённостью поля Земли пренебречь.

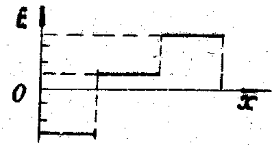


3. Расстояние между зарядами $q_1 = 10\,\text{мкКл}$ и $q_2 = -10\,\text{мкКл}$, $\ell = 10\,\text{см}$. Определить напряжённость поля в точке, лежащей на перпендикуляре к направлению от q_1 к q_2, проведённому через заряд q_1, и удалённой от q_1 на расстояние $r = 10\,\text{см}$.

4. Тонкий стержень длиной 2ℓ равномерно заряжен с линейной плотностью τ. Определить напряжённость электрического поля в точке *A*, лежащей на расстоянии *a* от него против его середины. Рассмотреть общий случай, а затем – частные: $a \ll \ell$ и $a \gg \ell$.

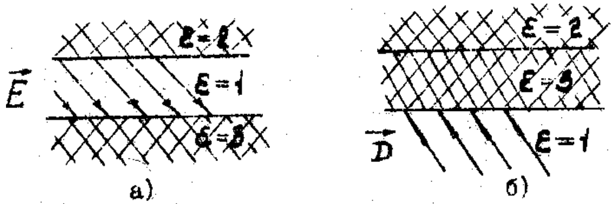
5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по зна-

ку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



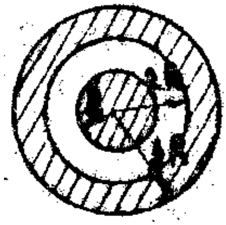
6. Чему будет равен поток вектора $\vec{E}$ через замкнутую поверхность, если алгебраическая сумма зарядов внутри поверхности равна нулю, но есть поле, созданное внешними зарядами?

7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.

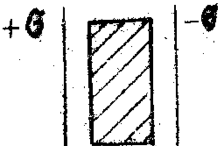


8. С какой силой, приходящейся на единицу площади, отталкиваются две одноименно заряженные бесконечно протяжённые плоскости с одинаковой поверхностной плотностью заряда $\sigma = -2\,\text{мкКл/м}^2$?

9. Металлический шар радиусом R помещён в сферическую концентрическую полость радиусом $2R$ другого металлического шара, радиус которого равен $3R$. Центры шаров совпадают. Полный заряд малого шара Q, большого шара – $8Q$. Построить график зависимости напряжённости электрического поля от расстояния до центра шаров.



10. Найти силу, приходящуюся на единицу площади, с которой притягиваются пластины конденсатора с поверхностной плотностью заряда $+Q$ и $-Q$. Изменится ли эта сила, если ввести в конденсатор пластину из диэлектрика, как показано на рисунке?



Вариант 2

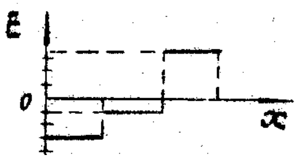
1. Электрическое поле имеет вид $\vec{E} = E_1\vec{e}_x + E_2\vec{e}_y + E_3\vec{e}_z$, где E_1, E_2, E_3 – константы. Является ли это поле однородным?

2. Два одинаковых положительных точечных заряда $q_1 = q_2 = q$ находятся на расстоянии $2\ell = 10\,\text{см}$ друг от друга. Найдите на прямой, являющейся осью симметрии этих зарядов, точку, в которой напряжённость электрического поля будет максимальной.

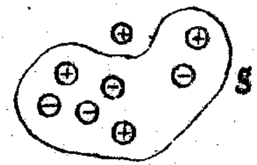
3. Две частицы массами m и M, имеющие заряды $-q$ и Q соответственно, движутся как одно целое в однородном электрическом поле. Расстояние между частицами равно ℓ. Определите напряжённость электрического поля и ускорение частиц.

4. Тонкое полукольцо радиусом $R = 20\,\text{см}$ несёт равномерно распределённый заряд $Q_1 = 2\,\text{мкКл}$. Определить силу, действующую на точечный заряд $Q_2 = 40\,\text{нКл}$, расположенный в центре кривизны полукольца.

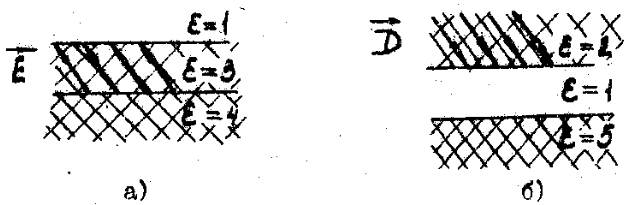
5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



6. Поле в вакууме создаётся системой одинаковых по модулю точечных зарядов $|q| = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найти потоки векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ через произвольную замкнутую поверхность *S*. Как изменятся эти потоки, если систему поместить в среду с $\varepsilon = 3$?

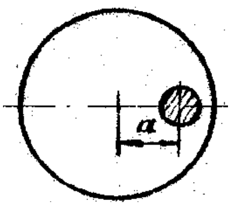


7. Качественно достройте линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.

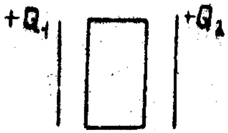


8. С какой силой (на единицу длины) взаимодействуют две заряженные бесконечно длинные параллельные нити с одинаковой линейной плотностью заряда $\tau = 20$ мкКл/м, находящиеся на расстоянии $r = 10$ см друг от друга?

9. В равномерно заряженном шаре с объёмной плотностью заряда $+\rho$ вырезана сферическая полость. Найти поле внутри полости, если центр её удалён на расстояние *a* от центра шара.



10. В плоском металлическом конденсаторе одна обкладка имеет заряд $+Q_1$, а другая $+Q_2$. Внутрь конденсатора параллельно обкладкам помещают незаряженную металлическую пластину. Какой заряд будет индуцирован на левой и правой поверхностях пластины?



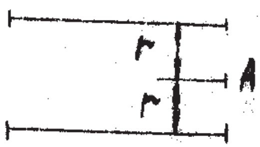
Вариант 3

1. Между точечным зарядом и проводящей равномерно заряженной пластиной находится диполь. В каком направлении он должен двигаться?

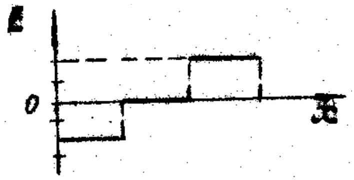
2. Определить напряжённость поля в центре шестиугольника со стороной a, по вершинам которого расположены шесть равных: а) одноимённых зарядов; б) разноимённых (чередующихся).

3. Два шарика одинаковых масс и радиусов с одинаковыми зарядами, подвешенные в одной точке на нитях одинаковой длины, спускаются в жидкий диэлектрик, проницаемость которого ε и плотность ρ_a. Какова должна быть плотность вещества шариков ρ, чтобы угол расхождения между нитями в воздухе и в диэлектрике был одним и тем же?

4. Найти напряжённость $\vec{E}_\text{A}$ электростатического поля, которое создают в точке A равномерно заряженные с линейной плотностью заряда $\tau = 4 \cdot 10^{-8}$ Кл/м тонкие нити длиной 1м. Точка A удалена от концов нитей на расстояние $r = 0{,}5$ м и лежит в одной плоскости с нитями.

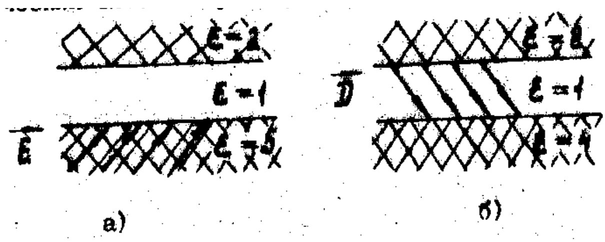


5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:

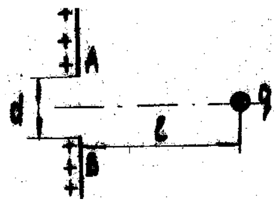


6. Равномерно заряженную с поверхностной плотностью $\sigma = 10\,\text{нКл/м}^2$ плоскость пересекает сфера, центр которой лежит на плоскости. Поток вектора $\vec{E}$ через сферу равен $3{,}2\,\text{В} \cdot \text{м}$. Определить радиус сферы.

7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.



8. Бесконечная плоскость с отверстием AB диаметра d равномерно заряжена с поверхностной плоскостью заряда $+Q$. Точечный заряд $+q$, находящийся от неё на расстоянии ℓ, испытывает воздействие со стороны плоскости силой F. В каком случае эта сила больше – при $\ell = 5$ или при $\ell = 10$?



9. Найти силу, которая будет действовать на заряд $q = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл, помещённый последовательно в электрическом поле сначала в точку A, а затем в точку B, если поле создано точечным положительным зарядом $Q = 3 \cdot 10^{-5}$ Кл, находящимся в центре сферы радиусом $R = 20$ см, по поверхности которой равномерно распределён отрицательный заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 2 \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2. Точка A находится от центра на расстоянии 16 см, а точка B – на расстоянии 30 см. Изобразить графически зависимость $E(r)$.

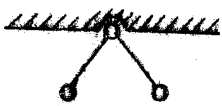
10. Одинаковые по модулю положительный и отрицательный точечные заряды притягиваются друг к другу с силой F. Уменьшится ли эта сила, если поместить между зарядами стеклянный шар?

Вариант 4

1. Как будет вести себя положительно заряженный шар в каждом из электрических полей, изображённых на рисунке силовыми линиями? Как будет вести себя в этих полях незаряженный шар?

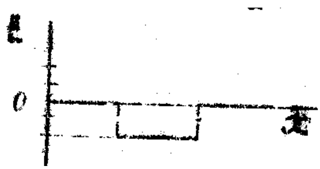
2. В вершинах квадрата со стороной a находятся одинаковые заряды $+q$. Какой заряд Q необходимо поместить в центре квадрата, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии?

3. Два одинаковых заряженных шарика массой m подвешены в одной точке на нитях длиной ℓ каждая. В точке подвеса находится третий шарик, заряженный так же, как и первые два. Вычислить заряд шариков, если угол между нитями в положении равновесия равен α.

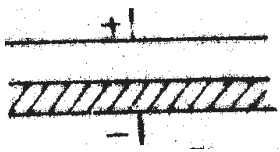


4. По тонкой пластинке, имеющей форму кольца с внутренним радиусом r и внешним R, равномерно распределён заряд q. Найти напряжённость поля на оси кольца в вакууме как функцию расстояния x от центра пластинки. Проанализировав ответ, получить из него выражение для напряжённости поля в случаях, когда: $r = 0(\text{диск})$; $r = R(\text{кольцо})$. Построить график зависимости $E(x)$.

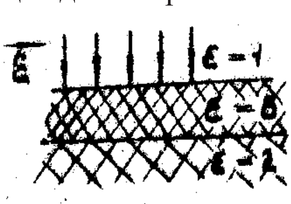
5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



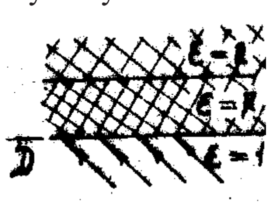
6. Конденсатор частично заполнен диэлектриком. В какой из его частей больше напряжённость поля, в какой – электрическое смещение?



7. Качественно достроить линии вектора $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах диэлектрических слоёв отсутствуют.



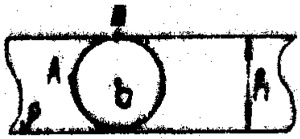
а)



б)

8. Две плоские пластины площадью $S = 200\,\text{см}^2$ каждая притягиваются в керосине с силой $F = 2{,}5 \cdot 10^{-2}\,\text{Н}$. Заряды на плоскостях равномерно распределены и противоположны по знаку. Расстояние между пластинами мало́. Определить находящиеся на них заряды.

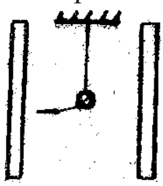
9. В равномерно заряженной с объёмной плотностью ρ бесконечной пластине сферическую полость вырезали так, как показано на рисунке. Толщина пластины *h*. Чему равна напряжённость электрического поля в точках *A*, *B*? Найти зависимость напряжённости электрического поля вдоль прямой *OA* от расстояния до точки *O*.



10. Точечный заряд $q = 20{,}0\,\text{нКл}$ находится в вакууме на расстоянии $a = 0{,}50\,\text{м}$ от заземлённой плоской металлической стенки. Найти силу *F*, с которой стенка притягивает к себе заряд.

Вариант 5

1. Между двумя разноимённо заряженными пластинами с равными по модулю зарядами помещён лёгкий шарик



на шёлковой нити, как показано на рисунке. Что будет происходить, если шарик привести в движение в направлении, указанном стрелкой? Рассмотреть два случая: шарик-проводник, шарик-диэлектрик.

2. Два неподвижных положительных заряда по $+1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{Кл}$ расположены на расстоянии $2 \cdot 10^{-13}\,\text{м}$ друг от друга. Вдоль перпендикуляра, проходящего через середину отрезка, соединяющего эти заряды, движется электрон. В какой точке этого перпендикуляра сила взаи-

модействия электрона и системы неподвижных зарядов максимальна?

3. Две частицы массами m и M, имеющие заряды $-q$ и Q, движутся как одно целое вдоль силовой линии однородного электрического поля с напряжённостью $\vec{E}$. Определить:

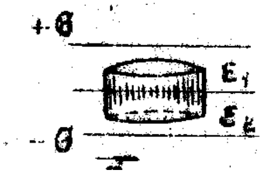
а) расстояние x между частицами, при котором возможно такое движение;

б) ускорение частиц.

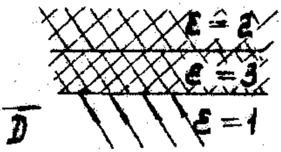
4. Тонкий прямой стержень длиной $\ell = 15\,\text{см}$ равномерно заряжен с линейной плотностью $\tau = 0{,}10\,\text{мКл/м}$. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10\,\text{см}$ от ближайшего конца находится точечный заряд $q_0 = 10\,\text{нКл}$. Определить силу взаимодействия стержня и заряда.

5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком

6. Пластины плоского конденсатора заряжены с поверхностной плотностью $\sigma = 200\,\text{нКл/м}^2$, пространство между пластинами заполнено двумя слоями диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 3, \varepsilon_2 = 5$. Найти поток вектора $\vec{D}$ и поток вектора $\vec{E}$ через цилиндр с площадью основания $S = 10\,\text{см}^2$.



7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.



а)

б)

8. Три тонкие металлические пластины, расположенные параллельно друг другу, имеют заряды $q, 2q$ и $-3q$. Расстояние между пластинами равно d, площадь каждой S. Определить силу, действующую на среднюю пластину.

9. Определить напряжённость электрического поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиусом R внутри и вне цилиндра, если объёмная плотность заряда внутри цилиндра равна ρ. Нарисовать график $E(x)$, где r – расстояние от оси цилиндра.

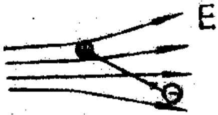
10. Металлический шарик радиусом r, имеющий заряд q, помещён в центр незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого R_1 и R_2. Найти напряжённость электрического поля, создаваемого системой, если:

а) слой изготовлен из металла;

б) металлический слой заземлён;

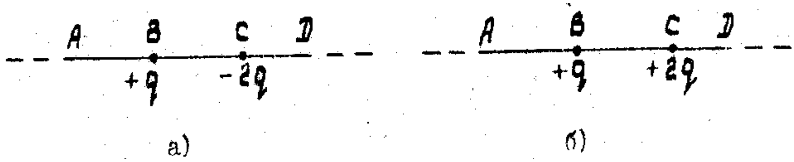
г) слой изготовлен из диэлектрика с проницаемостью ε.

Вариант 6



1. Что будет происходить с диполем, если его поместить в неоднородное электрическое поле (как показано на рисунке)?

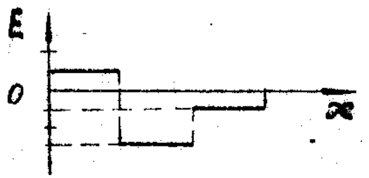
2. Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = q, q_2 = -2q$ или $q_2 = +2q$, находящимися в точках B и C на прямой AD. Где на прямой AD искать точку, в которой напряжённость результирующего поля равна нулю?



3. Вычислить напряжённость электрического поля в точке, расположенной на оси тонкого, равномерно заряженного диска радиусом R на расстоянии a от его центра. Поверхностная плотность заряда диска σ. Рассмотреть случаи, когда $R >> a, R << a, (R/a) \to \infty$.

4. Капля воды массой $1 \cdot 10^{-13}$ кг, на которой находится заряд, равный 10 зарядам электрона, поднимается вертикально вверх с ускорением $2,2\,м/с^2$ между пластинками горизонтально расположенного плоского конденсатора. Определить поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора. Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:

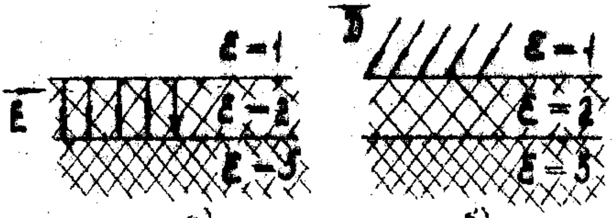


6. Пластины плоского конденсатора площадью $1 \cdot 10^{-2}\,м^2$ каждая притягиваются с силой $1,2 \cdot 10^{-2}\,Н$. Пространство между пластинами заполнено диэлектриком с $\varepsilon = 2$. Определить:

а) модуль вектора $\vec{D}$;

б) заряд пластин.

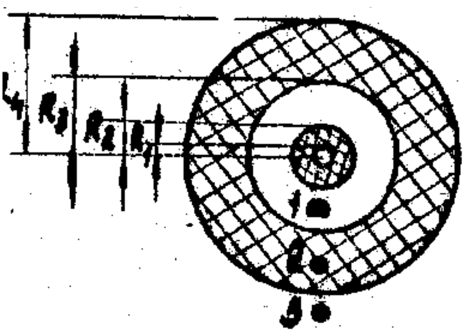
7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.



а) б)

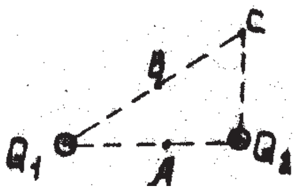
8. На бесконечном тонкостенном цилиндре диаметром $d = 20\,\text{см}$ равномерно распределён заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 4\,\text{мкКл/м}^2$. Определить напряжённость поля в точке, отстоящей от поверхности цилиндра на $a = 15\,\text{см}$. Построить график зависимости $\varepsilon(r)$.

9. Металлический шар радиусом $R_1 = 2\,\text{см}$ с зарядом $Q_1 = 3 \cdot 10^{-8}\,\text{Кл}$ окружён вплотную примыкающим к нему концентрическим слоем парафина (наружный радиус $R_2 = 4\,\text{см}$, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$) и металлической концентрической оболочкой, радиусы которой $R_3 = 6\,\text{см}$, $R_4 = 8\,\text{см}$, заряженной зарядом $Q_2 = -8 \cdot 10^{-8}\,\text{Кл}$. Как направлены векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в точках 1, 2, 3?



Вариант 7

1. Поле создаётся равными по модулю зарядами Q_1 и Q_2. Сравнить величину и указать направление векторов напряжённости в точках A, B, C.

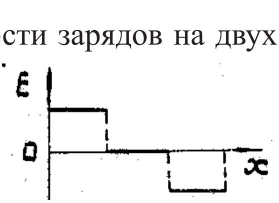


2. Сопоставить силу кулоновского взаимодействия F_e двух электронов с силой их гравитационного взаимодействия F_q.

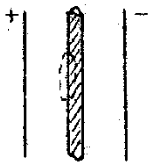
3. Два одинаковых заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины, при этом нити разошлись на угол α. Шарики погружаются в масло. Какова плотность ρ_0 масла, если угол расхождения нитей при погружении шариков в масло остался неизменным? Плотность материала шариков $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м^3, диэлектрическая проницаемость масла $\varepsilon = 2,2$.

4. На оси заряженного проволочного кольца по обе стороны от его центра находятся два точечных заряда q. Если заряды поместить в точках, отстоящих от центра кольца на расстояниях, равных радиусу, то система оказывается в равновесии. Чему равен заряд кольца? Будет ли равновесие устойчивым?

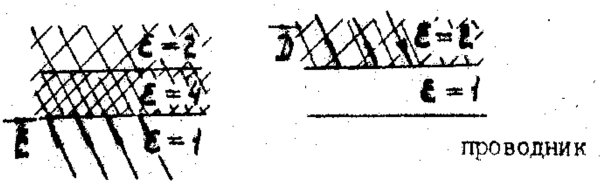
5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



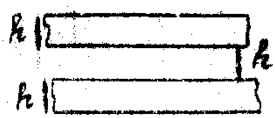
6. В зазор между разноимённо заряженными плоскостями ввели пластину из диэлектрика, не несущую сторонних зарядов. Пунктиром на рисунке показана воображаемая замкнутая поверхность, частично проходящая внутри диэлектрика, частично вне его. Чему равен поток вектора $\vec{D}$ через эту поверхность?



7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.



8. Расстояние между двумя пластинами h. Толщина пластин тоже h. Пластины разноимённо заряжены с объёмной плотностью $\pm\rho$. Определить силу, действующую на участок пластины с единичной площадью. Почему эта сила зависит от электрического заряда в выделенном объёме ρh и не зависит от толщины пластины, если $\rho h = \text{const}$?



9. Коаксиальный кабель имеет внутренний провод диаметром $d_1 = 2$ мм и свинцовую оболочку диаметром $d_2 = 8$ мм. Относительная диэлектрическая проницаемость изоляции между ними $\varepsilon = 4$. Заряды внутреннего и наружного провода противоположны по знаку, линейная плотность заряда $\tau = 3{,}14 \cdot 10^{-10}$ Кл/м. Определить напряжён-

ность электрического поля в точке, находящейся от оси кабеля:

а) на расстоянии $r_1 = 3\,\text{мм}$;

б) $r_2 = 8\,\text{мм}$.

Построить график зависимости $E(r)$.

10. В полости металлического шара радиусом R находится заряд Q:

а) найти заряд, индуцируемый этим зарядом на поверхности полости;

б) почему на поверхности шара заряд будет распределён с постоянной плотностью? Чему равна поверхностная плотность, если полный заряд шара равен нулю?

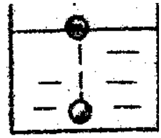
в) найти напряжённость электрического поля вне шара на расстоянии L от его центра в случае, если полный заряд шара равен Q. Зависит ли это поле от места, где расположена полость в шаре? От её формы?

Вариант 8

1. Два проводящих шара несут одинаковые заряды. Расстояние между шарами соизмеримо с их диаметрами. В каком случае сила взаимодействия между шарами (по модулю) больше: когда они заряжены одноименно или разноимённо?

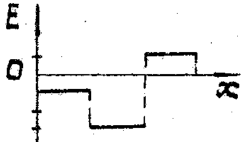
2. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1 = 7 \cdot 10^{-9}\,\text{Кл}$ и $q_2 = -14 \cdot 10^{-9}\,\text{Кл}$ равно 5 см. Найти напряжённость электрического поля в точке, находящейся на расстоянии 3 см от положительного заряда и 4 см от отрицательного.

3. Найти силу натяжения нити, соединяющей одинаковые шарики радиуса r, в центре которых находятся одинаковые заряды Q. Один из шариков плавает на поверхности жидкости плотностью ρ, второй имеет массу m и висит внутри жидкости. Расстояние между центрами шариков ℓ.



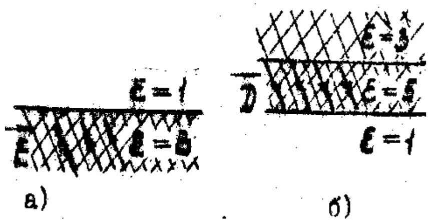
4. По тонкой нити, изогнутой по дуге окружности радиусом $R = 10\,\text{см}$ равномерно распределён заряд $Q = 20\,\text{нКл}$. Определить напряжённость E поля, создаваемую этим зарядом в точке, совпадающей с центром кривизны дуги, если длина нити равна четверти длины окружности.

5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком.

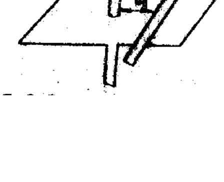


6. Воображаемая замкнутая поверхность S проходит частично вне пластины из изотропного диэлектрика, частично – внутри неё. Поток вектора $\vec{D}$ через эту поверхность равен нулю, поток вектора $\vec{E}$ больше нуля. Какие можно сделать из этого выводы?

7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектриков. Сторонние заряды на границах диэлектрических слоёв отсутствуют.



8. Два взаимно-перпендикулярных бесконечно длинных прямолинейных проводника, несущих равномерно распределённые заряды с линейными плотностями τ_1 и τ_2, находятся на расстоянии a друг от друга. Как зависит сила взаимодействия между проводниками от расстояния a?

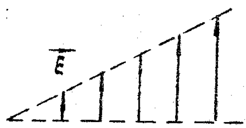


9. Шар радиусом R равномерно заряжен по объёму. Плотность заряда ρ_0. Найти электрическое поле внутри и вне шара. Построить график зависимости $E = f(r)$, где r – расстояние до точки O – центра шара.

10. Вблизи заземлённой плоской металлической стенки находится на расстоянии a от неё точечный заряд q. Определить поверхностную плотность σ зарядов, индуцированных на стенке, как функцию расстояния x от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на стенку. Вычислить суммарный индуцированный заряд $q_{\text{инд}}$, полагая размеры стенки бесконечно большими.

Вариант 9

1. Возможно ли существование такого электростатического поля, напряжённость которого во всех точках имеет одинаковое направление, а перпендикулярно к этому направлению изменяет свой модуль по линейному закону?



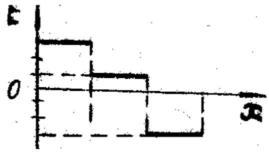
2. Отрицательный заряд $-5q$ и положительный $+2q$ закреплены на расстоянии r друг от друга. Где на линии, соединяющей заряды, следует поместить положительный заряд q_1, чтобы он находился в равновесии?

3. Полусфера радиусом R, обращённая выпуклостью вверх, имеет заряд Q, равномерно распределённый по её поверхности. Внутри полусферы, в её вершине, закреплена лёгкая непроводящая нить длиной R, на конце которой находится маленький шарик с зарядом q и массой m. Пренебрегая действием силы тяжести, определить натяжение нити и период колебаний шарика.

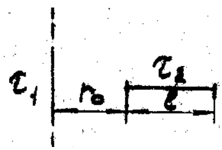
4. Поверхностная плотность заряда σ бесконечно протяжённой вертикальной плоскости равна $400\,\text{мкКл/м}^2$.

К плоскости на нити подвешен заряженный шарик массой $m = 10$ г. Определить заряд шарика Q, если нить образует с плоскостью угол $\varphi = 30^\circ$.

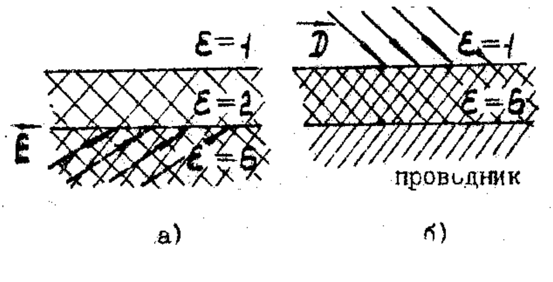
5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



6. Бесконечная прямая нить, равномерно заряженная электричеством с линейной плотностью $\tau_1 = +3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, и отрезок длины $\ell = 20$ см, равномерно заряженный с линейной плотностью $\tau_2 = +2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, расположены в одной плоскости перпендикулярно друг другу на расстоянии $r_0 = 10$ см (см. рисунок). Определить силу взаимодействия между ними.



7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.



8. На двух концентрических сферах радиусами R и $2R$ соответственно равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями σ_1 и σ_2:

а) используя теорему Гаусса, найти зависимость $E(r)$ напряжённости электрического поля от расстояния для трёх областей: I, II, III (принять $\sigma_1 = 4\sigma, \sigma_2 = \sigma$);

б) вычислить напряжённость E в точке, удалённой от центра на расстояние r, и указать направление вектора $\vec{E}$ (принять $\sigma = 30\,\text{нКл/м}^2$, $r = 1{,}5R$).

в) построить график зависимости $E(r)$.

9. В однородное электрическое поле напряжённостью E вставили тонкую металлическую пластину. Плоскость пластины перпендикулярна направлению $\vec{E}$:

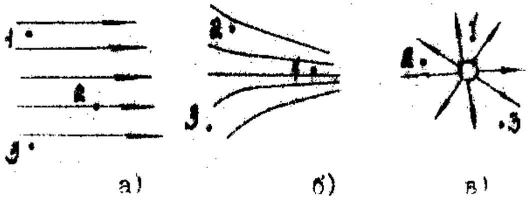
а) чему равна поверхностная плотность заряда на пластине?

б) чему равно электрическое давление на поверхность пластины (сила, действующая на единицу поверхности пластины)?

10. Электрическое поле создано заряженным шаром радиусом 20 см. Концентрическая с ним сфера делит пространство на две области. Энергия внутренней области в 4 раза меньше внешней. Найти радиус сферы.

Вариант 10

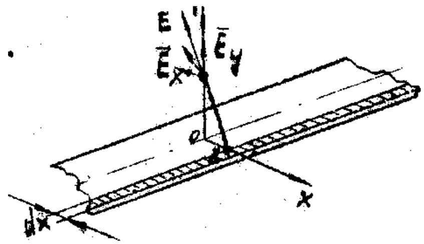
1. На рис. *а*, *б*, *в* показаны линии напряжённости электрических полей. Сравнить величины напряжённости в точках 1, 2, 3.



а)   б)   в)

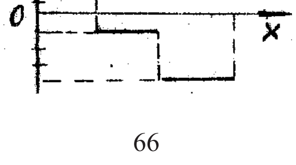
2. Три одинаковых положительных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = q$ расположены по вершинам равностороннего треугольника со стороной *a*. Какой отрицательный заряд q_4 надо поместить в центре треугольника, чтобы система из 4 зарядов находилась в равновесии? Устойчивое или неустойчивое будет это равновесие?

3. Бесконечно длинная полоска шириной 2*a* заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ . Найти напряжённость электростатического поля в точке, лежащей на перпендикуляре к полоске и удалённой от её середины на расстояние *r*.



4. На вертикальной пластине достаточно больших размеров равномерно распределён электрический заряд с поверхностной плотностью $\sigma = 0,3 \cdot 10^{-4}$ Кл/м^2 . На прикреплённой к пластине нити подвешен маленький шарик $m = 1 \cdot 10^{-3}$ г, несущий заряд того же знака, что и пластина. Найти заряд шарика, если нить образует с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$.

5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



6. Две одинаковые круглые пластины площадью $S = 400\,\text{см}^2$ каждая расположены параллельно друг другу. Заряд одной пластины $Q_1 = 400\,\text{нКл}$, другой $Q_2 = -200\,\text{нКл}$. Определить силу F взаимного притяжения пластин, если расстояние между ними:

а) $r_1 = 3\,\text{мм}$;

б) $r_1 = 10\,\text{м}$.

7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.

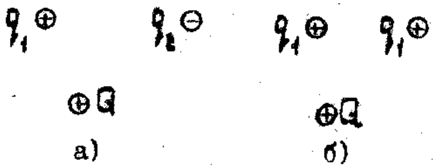
8. Используя теорему Гаусса, найти вектор электростатической индукции $\vec{D}$ и вектор напряжённости $\vec{E}$ как функцию расстояния r от центра симметрии, построить графики зависимости $D(r)$ и $E(r)$, если поле создают две сферические поверхности, центры которых совпадают, радиусы соответственно равны 10 и 30 см, величина заряда на каждой поверхности равна $1 \cdot 10^{-6}\,\text{Кл}$; пространство между ними заполнено парафином.

9. На высоте $h = 1\,\text{см}$ над плоскостью горизонтально лежащего металлического листа расположен равномерно заряженный диск радиусом $R = 1\,\text{см}$ с зарядом $q = 10^{-9}\,\text{Кл}$. Плоскость диска параллельна плоскости листа. Найти поверхностную плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на листе непосредственно под центром диска.

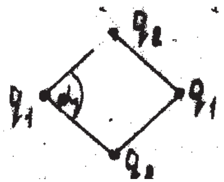
10. Между пластинами плоского конденсатора вложена тонкая слюдяная пластинка $(\varepsilon = 6)$. Какое давление испытывает эта пластинка при напряжённости электрического поля 10 кВ/см?

Вариант 11

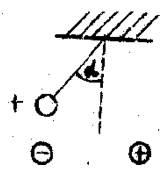
1. В поле, созданном двумя точечными зарядами, может свободно перемещаться пробный заряд Q. Изобразить траекторию движения этого заряда в случаях *а* и *б*, изображённых на рисунке.



2. В вершинах ромба, сторонами которого служат нерастяжимые нити, находятся в равновесии заряды, равные q_1, q_2, q_1, q_2. Найти угол при вершине с зарядом q_1.



3. Два шара, на которых находятся заряды, равные по величине $5 \cdot 10^{-7}$ Кл, но разные по знаку, закреплены в горизонтальной плоскости на расстоянии 0,5 м друг от друга.



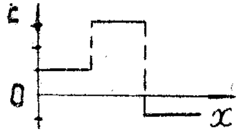
Если к ним поднести подвешенный на нити шарик массой 10^{-3} кг с зарядом $1 \cdot 10^{-7}$ Кл так, чтобы он находился в положении равновесия над отрицательно заряженным шариком на расстоянии 0,5 м от него, то натяжение его нити увеличивается вдвое. Определить угол отклонения нити от вертикали.

4. Тонкое кольцо радиусом R равномерно заряжено с линейной плотностью τ. Найти напряжённость:

а) в центре кольца;

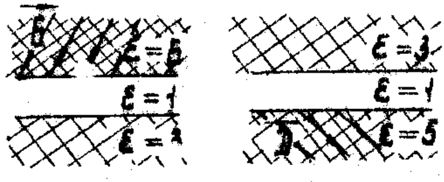
б) в точке, расположенной на оси кольца на расстоянии h от центра.

5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



6. С какой силой действует на грани тетраэдра заряд, помещённый в его центре? Поверхностная плотность заряда граней σ .

7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.



а) б)

8. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечно длинной нитью. Двигаясь под действием этого поля от точки, находящейся на расстоянии $x_1 = 1\,\text{см}$ от нити, до точки $x_2 = 4\,\text{см}$, частица изменила свою скорость от $2 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^6\,\text{м/с}$. Найти линейную плотность заряда нити.

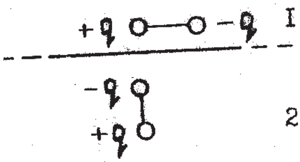
9. Определить напряжённость равномерно заряженной бесконечной диэлектрической пластины толщиной h вне

и внутри пластины, если объёмная плотность заряда в пластине ρ. Нарисовать график зависимости $E(r)$, где r – расстояние от середины толщины пластины.

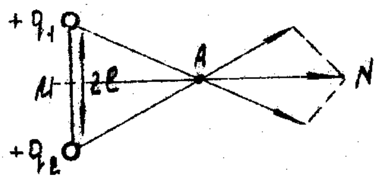
10. Два маленьких проводящих шарика подвешены на длинных непроводящих нитях к одному крючку. Шарики заряжены одинаковыми зарядами и находятся на расстоянии 5 см друг от друга. Что произойдёт, если один из шариков разрядить?

Вариант 12

1. Что будет происходить с диполями 1 и 2, помещёнными в поле равномерно заряженной нити?



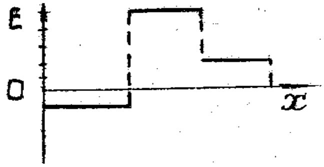
2. Два одинаковых положительных точечных заряда $q_1 = q_2 = q$ находятся на расстоянии $2\ell = 10$ м друг от друга. Найти на прямой *MN*, являющейся осью симметрии этих зарядов, точку, в которой напряжённость электрического поля имеет максимум.



3. Два шарика массой $m = 1$ кг каждый подвешены на нитях, верхние концы которых соединены вместе. Длина каждой нити $\ell = 1$ см. Какие одинаковые заряды необходимо сообщить шарикам, чтобы нити разошлись на угол $\alpha = 60^\circ$?

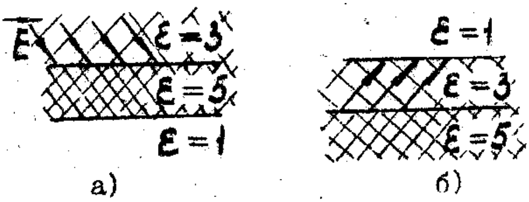
4. Рассчитать напряжённость поля в центре полусферы, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ.

5. Сравнить поверхностные плотности зарядов на двух параллельных бесконечно протяжённых пластинах (по знаку и по абсолютной величине), если зависимость $E(x)$ представлена графиком:



6. Поле в вакууме создаётся системой одинаковых по модулю зарядов $|q| = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл. Найдите потоки векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ через окружающую эти заряды произвольную замкнутую поверхность *S*. Как изменяются эти потоки, если эту систему зарядов поместить в среду с $\varepsilon = 2$?

7. Качественно достроить линии векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в изображённых на рисунках трёхслойных структурах, учитывая эффект поляризации диэлектрика. Сторонние заряды на границах раздела диэлектрических слоёв отсутствуют.

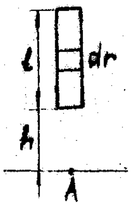


8. Между пластинами плоского конденсатора находится точечный заряд $1 \cdot 10^{-8}$ Кл. Поле конденсатора действует на этот заряд с силой $1 \cdot 10^{-2}$ Н. Определить силу взаимного притяжения пластин, если площадь каждой равна $1 \cdot 10^{-2}\,\text{м}^2$.

9. Два бесконечных тонкостенных коаксиальных цилиндра радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см равномерно заряжены электричеством с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 10\,\text{нКл/м}^2$ и $\sigma_2 = -3\,\text{нКл/м}^2$, пространство между цилиндрами заполнено парафином $(\varepsilon = 2)$. Определить напряжённость E поля в точках, находящихся на расстоянии

$r_1 = 2\,\text{см}$, $r_2 = 6\,\text{см}$, $r_3 = 15\,\text{см}$ от оси цилиндров. Построить график зависимости $E(r)$.

10. Над листом металла перпендикулярно к нему расположен равномерно заряженный тонкий стержень длиной $\ell = 1\,\text{см}$ с зарядом $q = 10^{-8}\,\text{Кл}$. Нижняя точка стержня удалена от листа на $h = 1\,\text{см}$. Найти поверхностную плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на листе непосредственно под стержнем.



3.2. Потенциал. Работа. Энергия электрического поля

Вариант 1

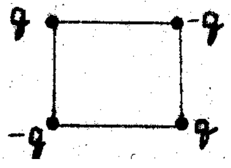
1. Потенциал поля, создаваемого некоторой системой зарядов, имеет вид

$$\varphi = a\left(x^2 + y^2\right) + bz^2,$$

где a и b – положительные постоянные. Найдите вектор напряжённости $\vec{E}$ и его модуль $\left|\vec{E}\right|$.

2. Найти работу A, которую нужно затратить, чтобы увеличить на $\Delta x = 0{,}2\,\text{мм}$ расстояние x между пластинами плоского конденсатора, заряженного разноимёнными зарядами $q = 0{,}2\,\text{мкКл}$. Площадь каждой из пластин $S = 400\,\text{см}^2$. В зазоре воздух.

3. Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов q, расположенных в вершинах квадрата со стороной a, показанного на рисунке.



4. Кольцо радиусом r из тонкой проволоки имеет заряд q. Найти потенциал φ и напряжённость электрического поля E на оси кольца на расстоянии ℓ от его центра. Исследовать полученные зависимости φ и E от ℓ при $\ell >> r$.

5. Электрическое поле создаётся двумя взаимно-перпендикулярными плоскостями, на которые нанесены электрические заряды одного знака с поверхностной плотностью σ на одной и 2σ на другой. Определить эквипотенциальные поверхности и показать их на рисунке.

6. Керн длиной $\ell = 25\,\text{см}$ потерял скорость, пробив броню толщиной $d = 5\,\text{см}$. Скорость керна в момент соприкосновения с бронёй равна $v = 1000\,\text{м/с}$. Найти разность потенциалов между головной и хвостовой частями стального керна, возникающую вследствие торможения о преграду.

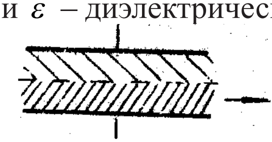
Вариант 2

1. Найти напряжённость поля, потенциал которого имеет вид:

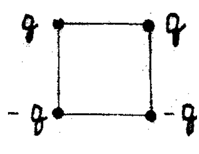
$$\varphi = \vec{a} \cdot \vec{r},$$

где $\vec{a}$ – постоянный вектор; $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поля.

2. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть одну половинку диэлектрика из плоского конденсатора. Заряд на пластинах q, площадь пластин S, d – расстояние между пластинами и ε – диэлектрическая проницаемость.



3. Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a, показанного на рисунке.



4. Конденсатор ёмкостью $C_1 = 1$ мкФ выдерживает напряжение не более 6 кВ, а конденсатор ёмкостью $C_2 = 2$ мкФ – не

более 4 кВ. Какое напряжение может выдержать система из двух конденсаторов при последовательном соединении?

5. Три плоскопараллельные пластины, расположенные на малом расстоянии друг от друга, равномерно заряжены. Поверхностные плотности зарядов соответственно равны $3\cdot10^{-8}; 5\cdot10^{-8}$ и $8\cdot10^{-8}$ Кл/м^2. Найти напряжённость поля и потенциал в точках, лежащих между пластинами и с внешней стороны. Построить график зависимости напряжённости и потенциала от расстояния.

6. Найти объёмную плотность энергии электрического поля в точке на расстоянии 2 см:

а) от поверхности заряженного шара радиусом 1 см;

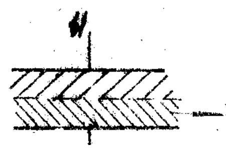
б) от бесконечно длинной заряженной нити.

Поверхностная плотность заряда на шаре $1{,}67\cdot10^{-5}$ Кл/м^2, линейная плотность заряженной нити $1{,}67\cdot10^{-7}$ Кл/м. Диэлектрическая плотность среды равна 2.

Вариант 3

1. Найти потенциал электростатического поля, если напряжённость его определяется выражением $\vec{E} = ax\cdot\vec{i}$, где a – постоянная; $\vec{i}$ – единичный вектор (в направлении оси x).

2. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть одну половинку диэлектрика из конденсатора, если напряжение между пластинами U поддерживается постоянным. Площадь пластин S, расстояние между ними d, диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε.



3. Имеется бесконечная прямая цепочка чередующихся зарядов $+q$ и $-q$. Расстояние между соседними зарядами

равно a. Найти энергию взаимодействия каждого заряда со всеми остальными. При вычислении воспользоваться формулой

$$\ln(1+\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\ldots$$

4. Металлический шар $(R=3\,\text{см})$ опущен наполовину в керосин. Какой находится на нём заряд, если он заряжен до 1800 В?

5. Найти наибольшее напряжение и заряд, который можно сообщить находящейся в воздухе сфере, если радиус сферы $R=15\,\text{см}$, а предельная напряжённость в воздухе $E^*=30\,\text{кВ/см}$.

6. Найти взаимную ёмкость системы из двух одинаковых металлических шаров радиусами a, расстояние между центрами которых b, причём $b>>a$. Система находится в диэлектрике с проницаемостью ε.

Вариант 4

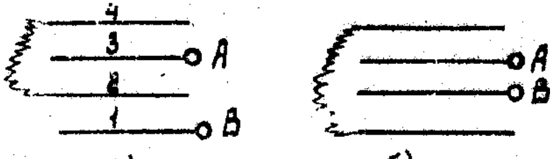
1. Определить напряжённость электрического поля, потенциал которого зависит от координат по закону $\varphi=a\left(x^2-y^2\right)$, где a – постоянная. Изобразить примерный вид силовых линий.

2. Найти работу A, которую нужно затратить, чтобы увеличить расстояние между пластинами плоского конденсатора от $x_1=0{,}8\,\text{мм}$ до $x_2=1\,\text{мм}$ при постоянном напряжении на обкладках $U=10\,\text{В}$. Площадь каждой из пластин $S=400\,\text{см}^2$. В зазоре воздух.

3. Восемь заряженных водяных капель радиусом 1 мм и зарядом $1\cdot10^{-10}\,\text{Кл}$ каждая сливаются в одну общую каплю. Найти потенциал большой капли.

4. Четыре одинаковые металлические пластины расположены в воздухе на расстоянии $d=1\,\text{мм}$ друг от друга.

Площадь каждой пластины $S = 220\,\text{см}^2$. Найти ёмкость системы между точками A и B, если пластины соединены так, как показано на рисунках.



а) б)

5. Имеется заряженный плоский конденсатор. Зазор между обкладками конденсатора заполняется диэлектриком с проницаемостью ε. Что происходит при этом с плотностью энергии поля w в зазоре, если конденсатор:

а) соединён с источником напряжения;

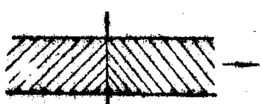
б) отключён от источника напряжения.

6. Имеется два тонких проволочных кольца радиусом R каждое, оси которых совпадают. Заряды колец равны $+q$ и $-q$. Найти разность потенциалов между центрами колец, отстоящих друг от друга на расстояние a.

Вариант 5

1. Определить напряжённость электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = axy$, где a – постоянная. Изобразить примерный вид силовых линий.

2. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть одну половинку диэлектрика из плоского конденсатора. Заряд на пластинах q; площадь пластин S; d – расстояние между пластинами и ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика.



3. Сферическую оболочку радиусом R_1, равномерно заряженную зарядом q, расширили до радиуса R_2. Найти работу, совершённую при этом электрическими силами.

4. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинами $d = 1\,\text{мм}$ опустили в горизонтальном положении в воду, которая целиком заполнила его. Затем конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения $U = 500\,\text{В}$. Найти приращение давления воды в конденсаторе.

5. Пробивное напряжение прессшпана толщиной $d = 1\,\text{мм}$ равно $U^* = 18 \cdot 10^3\,\text{В}$. Два конденсатора с изолирующим слоем из этого материала соединены последовательно. Ёмкость одного конденсатора $C_1 = 1100\,\text{нФ}$, а другого $C_2 = 400\,\text{нФ}$. Будет ли пробита эта система, если подать на неё напряжение $U = 3 \cdot 10^4\,\text{В}$?

6. Три одинаковых одноимённо заряженных шарика, заряд каждого q, а масса m, соединены невесомыми, нерастяжимыми и непроводящими нитями длины ℓ так, что они образуют равносторонний треугольник. Одну из нитей пережигают. Найти максимальную скорость шариков.

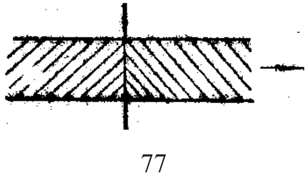
Вариант 6

1. Найти потенциал электрического поля, если напряжённость его меняется по закону

$$E = \frac{a\vec{r}}{r^4},$$

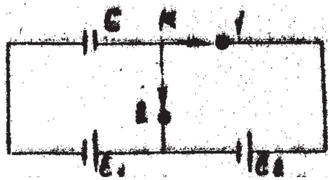
где a – постоянная.

2. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть одну половинку диэлектрика из плоского конденсатора, если напряжение между обкладками поддерживается постоянным и равным U. Площадь пластин равна S, расстояние между пластинами d и диэлектрическая проницаемость ε.



3. В центре сферической оболочки, равномерно заряженной зарядом $q = 5$ мкКл, расположен точечный заряд $q_0 = 1,5$ мкКл. Найти работу электрических сил при расширении оболочки – увеличении её радиуса от $R_1 = 50$ мм до $R_2 = 100$ мм.

4. Какое количество тепла выделится в цепи после переключения ключа *К* из положения *1* в положение *2*?



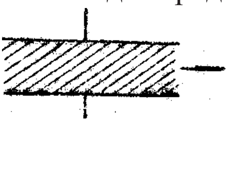
5. На плоский воздушный конденсатор с толщиной воздушного слоя $d = 1,2$ см подаётся напряжение $U = 32$ кВ. Будет ли пробит конденсатор, если предельная напряжённость в воздухе $E^* = 30$ кВ/см?

6. Точечный заряд $q = 100$ мкКл находится на расстоянии $\ell = 1,5$ см от проводящей плоскости. Какую работу надо совершить против электрических сил, чтобы медленно удалить этот заряд на очень большое расстояние от плоскости?

Вариант 7

1. Найти напряжённость электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = a\left(x^2 + y^2\right)$, где a – постоянная. Нарисовать примерный вид силовых линий.

2. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть диэлектрик, расположенный между обкладками плоского конденсатора, для двух случаев: когда напряжение между обкладками поддерживаются постоянным и равным U и когда заряд на обкладках является постоянным и равным q. Площадь пластин S, расстояние между пластинами d и диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε.



3. Сферическая оболочка заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ. Воспользовавшись законом сохранения энергии, найти модуль электрической силы на единицу поверхности оболочки.

4. Первоначально заряд $q = 1 \cdot 10^{-10}$ Кл распределён равномерно по объёму шара радиусом $R = 1$ см. Затем вследствие взаимного отталкивания заряд переходит на поверхность шара. Какую работу совершают при этом электрические силы над зарядом $(\varepsilon = 1)$?

5. Конденсатор, заряженный до напряжения $U_1 = 100$ В, соединяется с конденсатором такой же ёмкости, но заряженным до $U_2 = 200$ В параллельно (положительная обкладка с положительной, отрицательная – с отрицательной). Какое напряжение установится между обкладками?

6. Точечный заряд q находится на плоскости, отделяющей вакуум от безграничного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε. Найти модуль векторов $\vec{D}$ и $\vec{E}$ и потенциал φ как функцию расстояния r от заряда.

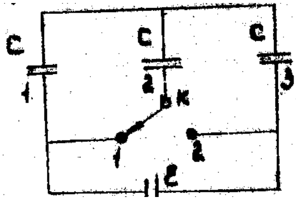
Вариант 8

1. Найти напряжённость электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = a \ln\left(x^2 + y^2\right)$, где a – постоянная. Нарисовать примерный вид силовых линий.

2. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено последовательно двумя диэлектрическими слоями *1* и *2* с толщиной d_1 и d_2 и проницаемостью ε_1 и ε_2 соответственно. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы вынуть второй диэлектрик, если заряд на обкладках поддерживать постоянным и равным q, площадь обкладок равна S.

3. Шарик радиусом 2 см заряжается отрицательно до потенциала 2000 В. Найти массу всех электронов, составляющих заряд, сообщённый шарику.

4. Какое количество тепла выделится в цепи после переключения ключа *K* из положения *1* в положение *2*?



5. Металлический шар радиусом $R_1 = 3\,\text{см}$, несущий заряд $q_1 = -20\,\text{нКл}$, окружён расположенной концентрически сферой радиусом $R_2 = 5\,\text{см}$, равномерно по поверхности заряженной зарядом $q_2 = 40\,\text{нКл}$. Найти напряжённость поля *E* и потенциал φ на расстояниях $r_1 = 2\,\text{см}, r_2 = 4\,\text{см}, r_3 = 6\,\text{см}$. Построить зависимости *E* и φ от расстояния *r* до центра шара.

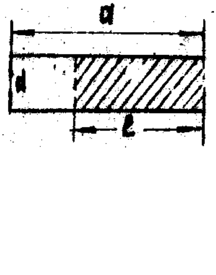
6. Два длинных прямых провода с одинаковым радиусом сечения *a* расположены в воздухе параллельно друг другу. Расстояние между их осями равно *b*. Найти взаимную ёмкость проводов C_1 на единицу их длины при условии $b >> a$. Вычислить C_1, если $a = 1\,\text{мм}$ и $b = 50\,\text{мм}$.

Вариант 9

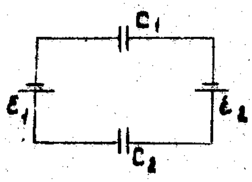
1. Определить напряжённость электрического поля, потенциал которого имеет вид $\varphi = ax + by$, где *a* и *b* – положительные постоянные. Изобразить примерный вид силовых линий.

2. Какую работу *A* нужно совершить, чтобы повернуть диполь с моментом $\vec{p}$ из положения по полю $\vec{E}$ в положение против поля?

3. Определить электроёмкость плоского конденсатора с прямоугольными пластинами длиной *a* и шириной *b*. Расстояние между пластинами *d*, вдоль стороны *a* на глубину ℓ вставлена диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью ε.



4. Найти заряд каждого конденсатора в цепи, показанной на рисунке.



5. Три электрона в состоянии покоя помещены в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 1\,\text{см}$. Они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить их предельную скорость v.

6. Пустотелый металлический шар, заряд которого q, а радиус r, плавает в жидкости с диэлектрической проницаемостью ε так, что его центр находится на уровне поверхности жидкости. Найти плотность свободных зарядов на поверхности шара.

Вариант 10

1. Определить потенциал электрического поля, если напряжённость меняется по закону

$$\vec{E} = \begin{cases} 0, & \text{при } r < R \\ \dfrac{a\vec{r}}{r^3}, & \text{при } r < R \end{cases},$$

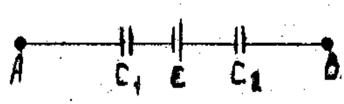
где a и R – некоторые постоянные $(R > 0)$.

2. Найти ёмкость шарового проводника радиусом $R_1 = 10\,\text{см}$, окружённого прилегающим к нему концентрическим слоем однородного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 6$ и наружным радиусом $R_2 = 20\,\text{см}$.

3. На какое расстояние могут сблизиться два электрона, если они движутся навстречу друг другу с относительной скоростью 10^8 м/с?

4. В некоторой цепи имеется участок AB, показанный на рисунке. ЭДС источника $\varepsilon = 10\,\text{В}$, ёмкость конденсаторов

$C_1 = 1\,\text{мкФ}, C_2 = 2\,\text{мкФ}$ и разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 5\,\text{В}$. Найти напряжение на каждом конденсаторе.



5. Конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с проницаемостью ε, зарядили, затратив на это энергию W_1. Затем конденсатор отсоединили от источника, слили из него диэлектрик и разрядили. Определить энергию W_2, которая выделилась при разрядке.

6. Как нужно соединить конденсаторы $C_1 = 2\,\text{пФ}, C_2 = 4\,\text{пФ}, C_3 = 6\,\text{пФ}$, чтобы получить систему с ёмкостью $C = 3\,\text{пФ}$?

Вариант 11

1. Определить потенциал электрического поля, если напряжённость его меняется по закону

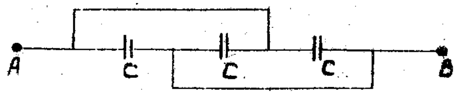
$$\vec{E} = \begin{cases} a\dfrac{\vec{r}}{R^3}, & \text{при } r < R \\ a\dfrac{\vec{r}}{r^3}, & \text{при } r > R \end{cases},$$

где a и R – некоторые постоянные $(R > 0)$.

2. В плоский конденсатор вдвинули плитку парафина $(\varepsilon = 2)$ толщиной $d = 1\,\text{см}$, которая вплотную прилегает к его пластинам. Насколько нужно увеличить расстояние между пластинами, чтобы получить прежнюю ёмкость?

3. Точечный заряд $q = 3\,\text{мкКл}$ помещается в центре шарового слоя из однородного и изотропного диэлектрика с $\varepsilon = 3$. Внутренний радиус слоя $a = 2{,}5\,\text{см}$, внешний $b = 5{,}0\,\text{см}$. Найти энергию W, заключённую в пределах диэлектрика.

4. Найти ёмкость системы одинаковых конденсаторов между точками A и B, которая показана на рисунке.



5. Бесконечная тонкая прямая нить заряжена однородно с плотностью $\tau = 2\,\text{мкКл/м}$. Найти зависимость напряжённости поля E и потенциала φ как функции расстояния r от нити. Изобразить эти зависимости на рисунке. Потенциал на расстоянии $r_0 = 1\,\text{м}$ положить равным нулю.

6. Найти количество теплоты Q, выделяющейся при соединении одноимённо заряженных обкладок конденсаторов с ёмкостями $C_1 = 2\,\text{мкФ}$ и $C_2 = 0,5\,\text{мкФ}$. Разности потенциалов между обкладками конденсаторов равны соответственно $U_1 = 100\,\text{В}$ и $U_2 = 50\,\text{В}$.

Вариант 12

1. Найти напряжённость электрического поля, потенциал которого имеет вид

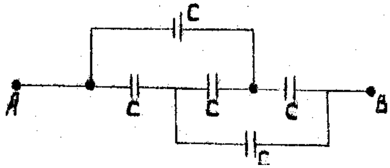
$$\varphi = \begin{cases} a, & \text{при} \quad r > R \\ a\dfrac{R}{r}, & \text{при} \quad r > R \end{cases},$$

где a и R – некоторые постоянные $(R > 0)$.

2. На тонком кольце радиусом R равномерно распределён заряд q. Какова наименьшая скорость $v_{\min}$, которую необходимо сообщить находящемуся в центре шарику массой m с зарядом q, чтобы он мог удалиться от кольца в бесконечность?

3. Считая, что масса электрона m определяется из соотношения $W = mc^2$, где W – электростатическая энергия электрона, найти радиус электрона r, приняв, что заряд электрона распределён по поверхности с постоянной плотностью.

4. Найти ёмкость системы одинаковых конденсаторов между точками *A* и *B*, которая показана на рисунке.



5. Параллельно бесконечной пластине, несущей заряд, равномерно распределённый по площади с поверхностной плотностью $\sigma = 20\,\text{нКл/м}^2$, расположена тонкая нить с равномерно распределённым по длине зарядом с линейной плотностью $\tau = 0{,}4\,\text{нКл/м}$. Определить работу по перемещению нити (в расчёте на 1 м длины проводника) при удалении её от плоскости на расстояние 3 см.

6. Оценить силу *F*, действующую на атом, находящийся на расстоянии $\ell = 20\,\text{нм}$ от поверхности острия металлической иглы с радиусом закругления $r = 10\,\text{нм}$. Считать потенциал на игле $\varphi_0 = 10\,\text{кВ}$, поляризуемость атома $\alpha = 10^{-30}\,\text{м}^3$.

СОДЕРЖАНИЕ

Составители:
Владимир Яковлевич Чечуев
Станислав Викторович Викулов
Эмма Борисовна Селиванова
Марина Георгиевна Алешкевич

**РЕПЕТИТОР ПО ФИЗИКЕ.
ЭЛЕКТРОСТАТИКА**

Учебное пособие

Редактор *Т. К. Коробкова*
Компьютерная верстка *В. Н. Зенина*

Подписано в печать 15 сентября 2015 г. Формат $60 \times 84\,^{1}/_{16}$.
Объем 4,1 уч.-изд. л., 5,4 усл. печ. л. Тираж 100 экз.
Изд. № 62. Заказ № 1425.

Отпечатано в Издательском центре НГАУ «Золотой колос»
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160, каб. 106.
Тел. (383) 267-09-10. E-mail: 2134539@mail.ru