Министерство сельского хозяйства Российской Федерации
ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ
Инженерный институт

Линейная алгебра

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы

Новосибирск 2021

УДК 512.64 (07)
ББК 22.143, я7
Л 591

Кафедра математики и физики

Составители: В.Н. Бабин Р.Т. Бильданов, С.Н. Бурков, М.В. Грунина, Е.Ю. Тарсис.

Рецензент: кандидат физ.-мат. наук, доцент О.Н. Чащин

Линейная алгебра: методические указания по самостоятельному изучению дисциплины и выполнению контрольной работы / Новосиб. гос. аграр. ун-т. Инженер. ин-т; сост.: В.Н. Бабин Р.Т. Бильданов, С.Н. Бурков, М.В. Грунина, Е.Ю. Тарсис. – Новосибирск, 2021. – 22 с.

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины «Линейная алгебра» и выполнению контрольной работы предназначены для студентов направления подготовки 09.03.03 Прикладная информатика всех форм обучения.

Методические указания утверждены и рекомендованы к изданию учебно-методическим советом факультета экономики и управления (протокол № 4 от «28» декабря 2021 г.)

Содержание

1. Цели и задачи дисциплины

Цель преподавания линейной алгебры в вузе для студентов экономических и организационно-управленческих специальностей – добиться усвоения студентами основ математического аппарата линейной алгебры, необходимого для решения теоретических и практических экономических и организационно-управленческих задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям, подготовить к чтению современной научной литературы и обеспечить запросы других разделов математики и дисциплин, использующих возникающие в линейной алгебре конструкции; развить умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений; повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки решения типовых задач, способствующих усвоению основных понятий, а также начальные навыки прикладных исследований.

Задачи дисциплины:

– развить у студентов логическое и алгоритмическое мышление;

– познакомить студентов с идеями и методами линейной алгебры;

– привить студентам опыт работы с математической и связанной с математикой научной и учебной литературой;

– привить студентам опыт решения задач с использованием инструментариев линейной алгебры.

Требования к уровню освоения учебной дисциплины

Дисциплина «Линейная алгебра » в соответствии с требованиями ФГОС ВО направлена на формирование следующих компетенций:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

2. Методические указания по выполнению контрольной работы

При выполнении контрольной работы студент должен руководствоваться следующими указаниями.

1. Работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть разборчиво написаны фамилия студента, его инициалы, полный шифр, номер контрольной работы, дата отсылки работы в институт.

2. Задачи следует располагать в порядке возрастания номеров. Перед решением каждой задачи надо полностью переписать её условие.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых формул, теорем.

4. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами, выполненными аккуратно, с указанием осей координат и единиц масштаба. Объяснения к задачам должны соответствовать обозначениям, приведённым на чертежах.

5. На каждой странице тетради необходимо оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

6. Контрольная работа должна выполняться **самостоятельно.** Несамостоятельно выполненная работа лишает студента возможности проверить степень своей подготовленности по теме.

7. Если преподаватель установит несамостоятельное выполнение работы, то она не будет зачтена.

8. Получив прорецензированную работу (как зачтённую, так и незачтённую), студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочёты. В случае незачёта по работе студент обязан в кратчайший срок выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом первоначально выполненную работу.

9. Студент выполняет тот вариант контрольной работы, который совпадает с последней цифрой его учебного шифра.

№ вари-анта	Номера задач контрольной работы по вариантам				
1	1	11	21	31	41
2	2	12	22	32	42
3	3	13	23	33	43
4	4	14	24	34	44
5	5	15	25	35	45
6	6	16	26	36	46
7	7	17	27	37	47
8	8	18	28	38	48
9	9	19	29	39	49
0	10	20	30	40	50

3. Задания для контрольной работы

В задачах **1-10** найти $P(A)$.

1. $P(A)=A^2-9A^{-1}-2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

2. $P(A)=A^2-3A^{-1}+2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$

3. $P(A)=A^2-4A^{-1}+5|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}.$

4. $P(A)=A^2+5A^{-1}-2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix}.$

5. $P(A)=A^2-6A^{-1}+|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$

6. $P(A)=A^2+2A^{-1}-8|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

7. $P(A)=A^2-7A^{-1}-2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

8. $P(A)=A^2-2A^{-1}+3|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$

9. $P(A)=A^2+4A^{-1}-5|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$

10. $P(A)=A^2-5A^{-1}+2|A|E,\ \ A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$

В задачах **11-20** систему уравнений решить методом Крамера.

11. $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7z=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} -x+4y=5 \\ x-3y-z=4 \\ x+2y+4z=-1 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 4x-y+3z=2 \\ 3x+2y-2z=3 \\ 2x+z=1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x+2y+z=-1 \\ -x+2z=2 \\ -2x+2y-3z=-5 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} 4x-y+2z=8 \\ -x+2y=-7 \\ x-3y-5z=2 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} 2x-2y+2z=2 \\ 2x+y+z=5 \\ x+y+5z=3 \end{cases}$

17. $\begin{cases} -2x+2y-4z=-8 \\ 3x-y=4 \\ -5x+6y-2z=-13 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} 3x-y+2z=12 \\ 2x+y-3z=7 \\ x-z=3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x-4y-5z=5 \\ 3x-y-5z=3 \\ 6x+2y=-8 \end{cases}$

В задачах **21–30** систему уравнений решить методом Гаусса.

21. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=1 \\ x_1+x_2+x_3+x_4=2 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3-7x_4=5 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-x_4=1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1-x_2-4x_3+9x_4=22 \\ x_1+2x_2-4x_4=-3 \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=-3 \\ 3x_1-2x_2-5x_3+x_4=3 \end{cases}$ **24.** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-2x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=6, \\ x_1+x_2-2x_3+x_4=3, \\ -x_1-2x_2+2x_3-x_4=-4. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4 \\ x_2-x_3+x_4=-3 \\ x_1+3x_2-4x_4=1 \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3 \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=3 \\ 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=1 \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4=4 \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4=7 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-2x_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=3, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=5, \\ 3x_1-x_2-x_3+3x_4=14. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3+x_4=4 \\ 4x_1+3x_2-x_3+2x_4=6 \\ 8x_1+5x_2-3x_3+4x_4=12 \\ 3x_1+3x_2-2x_3+2x_4=6 \end{cases}$

29. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=12 \\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4=14 \\ 5x_1-x_2+x_3-4x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-2x_3-x_4=13 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3-x_4=7, \\ 2x_1+3x_2-x_3+2x_4=-7, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4=4, \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=9. \end{cases}$

В задачах **31-40** даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4. Средствами векторной алгебры найти:
a) длину ребра A_1A_2;
b) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4
c) проекцию вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$;
d) площадь грани $A_1A_2A_3$;
e) объём пирамиды.

31. $A_1(2;0;0)$, $A_2(-2;0;1)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(3;0;6)$
32. $A_1(-2;0;2)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(3;2;5)$, $A_4(-1;3;2)$
33. $A_1(1;2;3)$, $A_2(2;0;0)$, $A_3(3;2;5)$, $A_4(4;0;0)$
34. $A_1(3;0;6)$, $A_2(1;-3;2)$, $A_3(3;2;5)$, $A_4(2;2;5)$
35. $A_1(-2;0;-1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;3;2)$, $A_4(3;2;7)$
36. $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(2;0;0)$
37. $A_1(-2;1;0)$, $A_2(3;2;7)$, $A_3(2;2;5)$, $A_4(6;1;5)$
38. $A_1(-1;3;0)$, $A_2(2;0;0)$, $A_3(-4;1;-2)$, $A_4(-6;0;5)$
39. $A_1(1;-1;6)$, $A_2(-5;-1;0)$, $A_3(4;0;0)$, $A_4(2;2;5)$
40. $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1;1;6)$, $A_4(0;4;-1)$

В задачах **41–50** даны координаты вершин треугольника *ABC*. Сделать чертёж. Составить уравнение стороны *AB*. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины *C* на медиану *AM*.

41. $A(-6;-3)$; $B(-4;3)$; $C(9;2)$ **42.** $A(-10;5)$; $B(6;-7)$; $C(-1;17)$

43. $A(10; –4)$; $B(–6; 8)$; $C(1; –16)$

44. $A(3; 2)$; $B(–13; –10)$; $C(–6; 14)$

45. $A(7; 4)$; $B(–9; –8)$; $C(–2; 16)$

46. $A(7; 3)$; $B(–9; –9)$; $C(–2; 15)$

47. $A(–13; 3)$; $B(3; –9)$; $C(–4; 15)$

48. $A(12; –2)$; $B(–4; –14)$; $C(3; 10)$

49. $A(7; 5)$; $B(–9; –7)$; $C(–2; 17)$

50. $A(13; 7)$; $B(–3; –5)$; $C(4; 19)$

4. Примеры решения задач контрольной работы

Пример 1. Найти $P(A)$.

$$P(A)=A^2-2A^{-1}+3|A|E,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-2)\cdot 4 & 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\\ 4\cdot 1+3\cdot 4 & 4\cdot(-2)+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 16 & 1\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу ищем по формуле: $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}.$

$|A|=1\cdot 3-(-2)\cdot 4=11,\qquad A_{11}=(-1)^{1+1}|3|=3,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}|4|=-4,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}|-2|=2,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}|1|=1.$

$$A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{-4}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$P(A)=A^2-2A^{-1}+3|A|E=\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 16 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}\frac{3}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{-4}{11} & \frac{1}{11}\end{pmatrix}+3\cdot 11\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7 & -8\\ 16 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{6}{11} & -\frac{4}{11}\\ \frac{8}{11} & -\frac{2}{11}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}33 & 0\\ 0 & 33\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{280}{11} & -\frac{92}{11}\\ \frac{184}{11} & \frac{372}{11}\end{pmatrix}.$$

Ответ: $P(A)=\begin{pmatrix} \dfrac{280}{11} & -\dfrac{92}{11} \\ \dfrac{184}{11} & \dfrac{372}{11} \end{pmatrix}.$

Пример 2. Решить систему уравнений методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6. \end{cases}$$

Решение. Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\ \text{по первой строке}\end{matrix}\right|=1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-15-8+2(-10+12)+3(-4-9)=-58.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\ \text{по первой строке}\end{matrix}\right|=6\cdot\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 20 & 3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}=6(-15-8)+2(-100+24)+3(-40-18)=-464.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\ \text{по первой строке}\end{matrix}\right|=1\cdot\begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}-6\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}+$$

$$+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=-100+24-6(-10+12)+3(12-60)=-232.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix}\text{разложим определитель}\\ \text{по первой строке}\end{matrix}\right| = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 20 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 20 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} +$$

$$+6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 18 + 40 + 2(12-60) + 6(-4-9) = -116.$$

При вычислении определителей можно воспользоваться так же правилом треугольников (Саррюса).

По формулам Крамера находим $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 8$, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 4$, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2$.

Ответ: (8; 4; 2).

Пример 3. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 9, \\ 6x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 19, \\ 5x_1 - 2x_2 - 8x_4 = 16 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 - 26x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 2 & -4 & 19 \\ 5 & -2 & 0 & -8 & 16 \\ 5 & 2 & -1 & -26 & -1 \end{array}\right)(-6)(-5)(-5) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & -2 & -5 & -18 & -29 \\ 0 & 2 & -6 & -36 & -46 \end{array}\right) : 2 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & -2 & -5 & -18 & -29 \\ 0 & 1 & -3 & -18 & -23 \end{array}\right)(2)(-1) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -16 & -35 \\ 0 & 0 & -13 & -50 & -99 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ : \\ \\ (13)(4)(-1) \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -76 & 57 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right) : (-76) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -24 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 \end{array}\right) (2)(24)(-4) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 21/2 \end{array}\right).$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -5, \\ x_3 = \dfrac{21}{2}, \\ x_4 = -\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(0; -5; \dfrac{21}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$.

Пример 4. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(2; -1; 1)$, $A_2(5; 5; 4)$, $A_3(3; 2; -1)$, $A_4(4; 1; 3)$.

Средствами векторной алгебры найти:

a) длину ребра A_1A_2;

b) угол между ребрами A_1A_2 и A_3A_4;

c) проекцию вектора $\overline{A_1A_2}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$;

d) площадь грани $A_1A_2A_3$;

e) объём пирамиды.

Решение.

a) Найдем координаты вектора $\overline{A_1A_2}$:

$\overline{A_1A_2} = \{5-2, 5-(-1), 4-1\} = \{3, 6, 3\}$. Длина ребра A_1A_2 равна

$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{54}.$

b) Чтобы найти угол между ребрами A_1A_2 и A_3A_4 сначала найдем координаты вектора $\overline{A_3A_4}$: $\overline{A_3A_4} = \{1, -1, 4\}$, а затем используем формулу $\cos\alpha = \dfrac{\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_3A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overline{A_3A_4}\right|} = \dfrac{3\cdot 1 + 6\cdot(-1) + 3\cdot 4}{\sqrt{54}\cdot\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \dfrac{9}{18\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{3}}$ и определим угол $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

c) Проекция вектора $\overline{A_1A_3}$ на вектор $\overline{A_1A_4}$:

$$Пр_{\overline{A_1A_4}}\overline{A_1A_3} = \frac{\overline{A_1A_3}\cdot\overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_4}\right|};\ \overline{A_1A_3} = \{1, 3, -2\},\ \overline{A_1A_4} = \{2, 2, 2\};$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$Пр_{\overline{A_1A_4}}\overline{A_1A_3} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 2 - 2\cdot 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

d) Площадь грани $A_1A_2A_3$ – это площадь треугольника $A_1A_2A_3$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|;$$

$$\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -21\bar{i} + 9\bar{j} + 3\bar{k};$$

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{21^2 + 9^2 + 3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{531}\ (кв.ед.).$$

e) Объем пирамиды: $V = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right)\right|;$

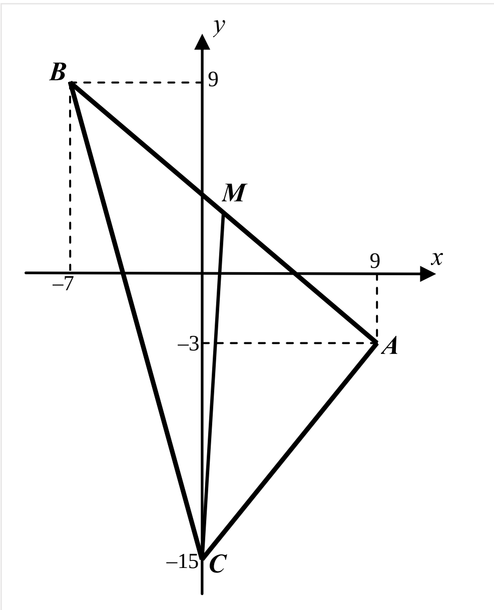
$$\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}\right) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 24 + 6 - 18 - 12 + 12 = -18;$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot|-18|=\frac{18}{6}=3\left(куб.ед.\right).$$

Ответ: a) $\sqrt{54}$; b) $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$; c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $\frac{1}{2}\sqrt{531}\left(кв.ед.\right)$; e) $3\left(куб.ед.\right)$.

Пример 5. Даны координаты вершин треугольника *ABC:* *A* (9; –3); *B* (–7;9); *C* (0; –15). Сделать чертёж. Составить уравнение стороны *AB*. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины *A* на медиану *CM*.

Решение.



Для составления уравнения стороны *AB* воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$ Тогда *AB*: $$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\Rightarrow\frac{x-9}{-7-9}=\frac{y-(-3)}{9-(-3)}\Rightarrow$$

$\frac{x-9}{-16}=\frac{y+3}{12}$ или $3x+4y-15=0.$

Для составления уравнения перпендикуляра AD будем использовать уравнение прямой, которая проходит через точку (x_0, y_0) перпендикулярно вектору $\bar{n}=\left\{n_x, n_y\right\}$: $n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)=0.$ Так как перпендикуляр опущен на медиану CM, то $\bar{n}=\overline{CM}=\left\{x_M-x_C, y_M-y_C\right\}.$ Точка M – середина стороны AB. Её координаты:

$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{9-7}{2}=1,\ \ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-3+9}{2}=3,\ \ M(1, 3).$

$\bar{n}=\left\{1-0, 3-(-15)\right\}=\left\{1,18\right\}$. Таким образом уравнение перпендикуляра AD: $1(x-9)+18(y+3)=0 \Rightarrow\ x-9+18y+54=0 \Rightarrow x+18y+45=0.$

Ответ: AB: $3x+4y-15=0;$ AD: $x+18y+45=0.$

5. Вопросы к экзамену

1. Матрицы, операции над ними.
2. Определители второго и третьего порядков. Формула Лапласа.
3. Свойства определителей. Вычисление определителей методом Гаусса.
4. Обратная матрица.
5. Ранг матрицы.
6. Системы линейных уравнений, основные понятия и определения.
7. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод Крамера.
8. Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы.
9. Метод Гаусса.
10. Метод Жордана-Гаусса.
11. Система m линейных уравнений с n переменными. Теорема Кронекера-Капелли.
12. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.
13. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над ними.
14. Декартова система координат.
15. Скалярное произведение векторов.
16. n-мерный вектор и векторное (линейное) пространство.
17. Линейная зависимость и независимость векторов линейного пространства.
18. Размерность и базис линейного пространства.
19. Переход к новому базису.
20. Прямая на плоскости. Общее уравнение прямой.
21. Уравнение в отрезках и с угловым коэффициентом.
22. Уравнения прямой проходящей через данную точку.
23. Уравнение прямой проходящей через две данные точки.

24. Пересечение прямых. Угол между прямыми.

25. Расстояние от точки до прямой.

26. Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы.

27. Общее уравнение плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

28. Взаимное расположение двух плоскостей.

29. Прямая в пространстве.

30. Комплексные числа и действия над ними.

6. Список литературы

Список основной литературы

1. Курс высшей математики для экономистов: учебник / под ред. Р.В. Сагитова. - Москва: ИНФРА-М, 2021. - 647 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - DOI 10.12737/13680. - ISBN 978-5-16-011091-2. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1735644
2. Рудык, Б. М. Линейная алгебра: учебное пособие / Б. М. Рудык. - Москва: ИНФРА-М, 2019. - 318 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004533-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1010102
3. Шевцов, Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учебное пособие / Г.С. Шевцов. - 3-е изд., испр. и доп. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2019. - 544 с. - ISBN 978-5-9776-0258-7. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1015326

Список дополнительной литературы

1. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер [и др.]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. - 3-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. - 479 с. - (Серия «Золотой фонд российских учебников») - ISBN 978-5-238-00991-9. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1028709.
2. Красс, М. С. Математика для экономического бакалавриата: учебник / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. - Москва: ИНФРА-М, 2020. - 472 с. - (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-004467-5. - Текст: электронный. - URL: https://znanium.com/catalog/product/1072296

Составители: Бабин Владислав Николаевич
Бильданов Ринат Талгатович
Бурков Сергей Николаевич
Грунина Мария Викторовна
Тарсис Екатерина Юрьевна

Линейная алгебра

Методические указания по самостоятельному изучению дисциплины
и выполнению контрольной работы

Объем 1,38 уч. – изд. л.

Новосибирский государственный аграрный университет
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160

Авторская редакция
Компьютерная верстка Е.Ю. Тарсис