НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТИТУТ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших аграрных учебных заведений, обучающихся по инженерным специальностям.

Издание второе, стереотипное

Новосибирск 2017

УДК 512.64 (075)

ББК 22.134

Э 456

Составители: Р.Т.Бильданов, М.В.Грунина, В.Н.Бабин.

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб.-метод. пособие / сост.: Р.Т.Бильданов, М.В.Грунина, В.Н.Бабин; Новосиб. гос. аграр. ун-т. – Новосибирск, 2017 – 86 с.

Рецензенты: В.П.Ильин, д-р.физ.-мат.наук, проф.,
М.С.Соппа, д-р.физ.-мат.наук, проф.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, всех форм обучения по направлениям подготовки, реализуемым в ФГБОУ ВО Новосибирский ГАУ

Введение

Курс математики, изучаемый в высших учебных заведениях, обычно называют «Курс высшей математики». Разделы, изучаемые в средней школе, обычно называют «Курс элементарной математики».

Разделы математики, которые объединены под общим названием «Высшая математика», развились из учений, возникших в XVII и XVIII веках в связи с прогрессом науки и техники. Потребности общества в более глубоком изучении природы привели к учениям о процессах, явлениях, наблюдаемых в окружающем мире. Для изучения этих процессов используется математика. Галилей говорил, что «законы природы записаны на языке математики».

Резко повысилась роль математики в решении таких экономических проблем, как закономерности ценообразования, изучение полных затрат труда и материалов на единицу продукции, исследование межотраслевых связей, определение рентабельности капиталовложений, определение эффективного размещения производительных сил, оптимальное планирование производственного процесса, эффективное использование ограниченных ресурсов, рациональная организация технологического процесса, обоснование нормативов материальных ресурсов и оборотных средств, календарное и производственное планирование, и многие другие не менее важные проблемы могут успешно решаться при широком привлечении математических методов исследования.

Глава 1. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений

§1. Матрицы и действия над ними

Определение 1. Матрицей размерности *m*×*n* называется прямоугольная таблица из $m\times n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах.

Обозначаются матрицы, как правило, большими буквами A, B, C,..., или подробно

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Числа a_{ij}, образующие матрицу, называются **элементами матрицы**. При этом первый индекс (i) обозначает номер строки, а второй (j) – номер столбца, в которых расположен элемент a_{ij}. Так, a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца матрицы A.

Рассмотрим некоторые примеры матриц.

1. **Квадратная матрица.** Матрица размерности $n\times n$ называется квадратной матрицей порядка n. Общий вид квадратной матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \text{ или } A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}.$$

2. **Матрица строка**:

$$A = (a_1\ a_2\ ...\ a_n).$$

3. **Матрица столбец**:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

4. **Треугольная матрица** — это квадратная матрица, у которой элементы, расположенные под диагональю (или над диагональю), равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. **Единичная матрица** — это квадратная матрица, по главной диагонали которой стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

6. **Нуль-матрица** — это матрица, все элементы которой равны нулю.

$$0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Определение 2. Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются **равными** (обозначается равенство $A = B$), если их размерности совпадают и соответствующие элементы равны, т.е. при любых i, j $\quad a_{ij} = b_{ij}$.

Определение 3. Суммой двух матриц $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ одной размерности называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ той же размерности (обозначается $C = A + B$), элементы которой определяются равенствами

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

Определение 4. Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на число λ называется матрица $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$, элементы которой определяются равенствами

$$b_{ij} = \lambda\cdot a_{ij},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число называются линейными операциями над матрицами и обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$ (переместительный закон);
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (сочетательный закон);
3) $A + 0 = A$;
4) $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$;

$$\left.\begin{array}{l} 5)(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A \\ 6)(A+B)\cdot\alpha=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B \end{array}\right\}$$ распределительный закон.

Рассмотрим прямоугольные матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{jk}\right)_{n\times p}$ такие, что число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*, и определим для них операцию умножения.

Определение 5. Произведением матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ **на матрицу** $B=\left(b_{jk}\right)_{n\times p}$ называется матрица $C=\left(c_{ik}\right)_{m\times p}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ik}=\underline{a}_i\cdot\overline{b}_k=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot b_{jk},$$

где $\underline{a}_i$ – *i*-я строка матрицы *A;* $\overline{b}_k$ – *k*-й столбец матрицы *B*.

Замечание. Размерность произведения матриц можно определить по правилу, которое в дальнейшем будем называть правилом умножения размерностей

$$(m\times n)\cdot(n\times p)=(m\times p).$$

Свойства умножения матриц

Свойство 1. Произведение матриц, вообще говоря, непереставочно (некоммутативно), т.е.

$$A\cdot B\neq B\cdot A.$$

Свойство 2. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C.$

Свойство 3. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,$

$$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C.$$

Свойство 4. $A\cdot E=A$, $E\cdot B=B$, где *E* — единичная матрица.

Пример 1. Найти произведение матриц $A\cdot B$,

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\0&4&-2\\3&-2&1\end{pmatrix}\text{ и }B=\begin{pmatrix}-4&-1&0\\2&1&-1\\5&1&-3\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 2\cdot(-4)+(-1)\cdot 2+3\cdot 5 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot 0+(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-3) \\ 0\cdot(-4)+4\cdot 2+(-2)\cdot 5 & 0\cdot(-1)+4\cdot 1+(-2)\cdot 1 & 0\cdot 0+4\cdot(-1)+(-2)\cdot(-3) \\ 3\cdot(-4)+(-2)\cdot 2+1\cdot 5 & 3\cdot(-1)+(-2)\cdot 1+1\cdot 1 & 3\cdot 0+(-2)\cdot(-1)+1\cdot(-3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -8 \\ -2 & 2 & 2 \\ -11 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A{\cdot}B$, где

$$A=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot(-1) \\ 5\cdot 4-1\cdot 3+0\cdot(-1) \\ -7\cdot 4+2\cdot 3+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 \\ 17 \\ -23 \end{pmatrix}.$$

§2. Определители и их свойства

Каждой квадратной матрице можно сопоставить число, которое называется ее **определителем или детерминантом**. Определитель матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ обозначается символами $det\,A$, $|A|$, ΔA или записывается через элементы матрицы в виде:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы матрицы a_{ij} $(i,\ j = 1,...,n)$ называются **элементами определителя**, а порядок матрицы n называется **порядком определителя**.

Определение 1. Определителем второго порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице второго порядка и находится по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Определение 2. Определителем третьего порядка называется число, которое ставится в соответствие матрице третьего порядка и находится по формуле

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot M_{11} - a_{12} \cdot M_{12} + a_{13} \cdot M_{13}.$$

Определители второго порядка

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называются **минорами элементов** a_{11}, a_{12}, a_{13} определителя.

Определение 3. **Минором M_{ij}** определителя n-го порядка называется определитель порядка $(n$-$1)$, полученный из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Определение 4. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij}, взятый со знаком (+) или (–), который определяется по правилу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Таким образом, определитель третьего порядка запишется в виде

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}. \qquad (1)$$

Это правило называется разложением определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Замечание 1. Можно вычислить определитель, раскладывая его по элементам любой строки или столбца.

Пример 3. Вычислить определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 6 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение. Найдём алгебраические дополнения, например, к элементам первой строки.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 35 = -32,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(18 + 14) = -32,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 2 = 32.$$

По формуле (1) получим

$|A| = 2\cdot(-32) - 4\cdot(-32) + 1\cdot 32 = 96$.

Замечание 2. Раскроем определители второго порядка в формуле (1) и объединим члены, входящие со знаком (+) и (–). Тогда для вычисления определителя третьего порядка получим следующее правило:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} -$$

$$-\, a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}. \qquad (2)$$

Заметим, что первое слагаемое, входящее в правую часть этой формулы со знаком (+), есть произведение элементов главной диагонали матрицы A, а каждое из двух других – произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы. Слагаемые, входящие в формулу (2) со знаком (–), строятся таким же образом, но относительно второй (побочной) диагонали. Это правило вычисления определителя третьего порядка называется **правилом треугольника или правилом Саррюса** и может быть схематично изображено в следующем виде:

Пример 4. Вычислить определитель с помощью правила треугольника:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & -7 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot(-2) + 2\cdot 6\cdot 5 + 4\cdot(-7)\cdot 3 - 3\cdot(-1)\cdot 6 - 5\cdot(-7)\cdot 1$$

$$-2\cdot 4\cdot(-2) = 2 + 60 - 84 + 18 + 35 + 16 = 47.$$

Определение 5. Определителем *n*-го порядка, соответствующим матрице $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, назовем число, которое находится по следующему правилу:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} +....+ a_{in}\cdot A_{in}.$$

Замечание 3. Вычислять определитель также можно, раскладывая его по элементам любого столбца или строки.

Свойства определителей

Свойство 1. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.

Свойство 2. Общий множитель какой-либо строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Свойство 3. Если в определителе две строки (или два столбца) пропорциональны (в частности, равны), то определитель равен нулю.

Свойство 4. При замене всех строк определителя на столбцы с теми же номерами величина его не изменится.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) нули, то определитель равен нулю.

Свойство 6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Свойство 7. Сумма попарных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

§3. Обратная матрица

Определение 1. Квадратная матрица называется **невырожденной**, если ее определитель отличен от нуля.

Определение 2. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если их произведение равно единичной матрице

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Теорема. Для существования матрицы A^{-1} для матрицы A необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденная.

Обратная матрица для $n = 3$ находится по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения.

Пример 5. Найти матрицу, обратную данной. Сделать

проверку. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Находим определитель матрицы A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 0 + 3\cdot 1\cdot 0 - 0\cdot 2\cdot 0 - 3\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 1$$

$= -9 \neq 0$, т.е. данная матрица является невырожденной, обратная матрица существует. Вычислим соответствующие алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=2;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=-6;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2;\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}=3;\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4.$$

Находим обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\ -\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Проверка заключается в перемножении матриц

$AA^{-1}=A^{-1}A=E$ (единичная матрица).

§4. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы

Определение 1. К элементарным преобразованиям строк относятся следующие преобразования:
1. Умножение всех элементов какой-либо строки матрицы на одно и то же число, отличное от нуля.
2. Перестановка строк местами.

3. Прибавление к элементам какой-либо строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.
4. Отбрасывание строк матрицы, все элементы которых равны нулю.
Всякая матрица элементарными преобразованиями строк может быть приведена к одному из видов:

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Рационально проводить элементарные преобразования по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & .. & * \\ * & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. \\ * & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & .. & * \\ 0 & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & * & .. & * \\ 0 & 1 & * & .. & * \\ 0 & 0 & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & ..* \\ 0 & 1 & * & * & ..* \\ .. & .. & .. & .. & .... \\ 0 & .. & 1 & * & ..* \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & * & * & .. & * & * & .. & * \\ 0 & 1 & * & .. & * & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 1 & * & * & .. & * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & * & * & .. & * \\ 0 & 1 & .. & 0 & * & * & .. & * \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & 1 & * & * & .. & * \end{pmatrix}$$

Определение 2. Рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора.
Замечание. Ранг диагональной матрицы равен числу ненулевых элементов главной диагонали.
Теорема. Элементарные преобразования строк матрицы не меняют ранга матрицы.

Определение 3. Две матрицы A и B называются **эквивалентными**, если одна из другой получаются с помощью элементарных преобразований 1 – 3. Обозначение: $A \sim B$.

Пример 6. Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Последовательно осуществляем линейные преобразования строк данной матрицы для приведения ее к верхнетреугольному виду.

Шаг 1. Переставим в данной матрице первую и вторую строки.

Шаг 2. Умножим на 2 первую строку и прибавим её к третьей («заработаем» нуль на месте «3-1»,т.е. вместо (–2) получим (0)). В результате получим: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Шаг 3. Умножим на –3 вторую строку и прибавим её к третьей («заработаем» нуль на месте «3-2»,т.е. вместо (–3) получим (0)). Получим: $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, получили верхнетреугольную матрицу, эквивалентную данной. Очевидно, что все миноры третьего порядка равны нулю. Легко указать минор второго порядка, не равный нулю. Следовательно, ранг равен 2: $rang = 2$.

§5. Решение систем линейных уравнений

Определение 1. Система линейных уравнений называется **Крамеровской**, если в ней число уравнений равно числу неизвестных. При $n = 3$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1}$$

a_{ij} называются **коэффициентами при неизвестных**, b_1, b_2, b_3 – **свободными членами**.

Определение 2. Решением системы (1) называется упорядоченный набор чисел (x_1; x_2; x_3), при подстановке которых в (1) все уравнения обращаются в тождества.

Определение 3. Система линейных уравнений называется **несовместной**, если у нее нет ни одного решения.

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений

Для решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Крамера нужно вычислить определители Δ, Δx_1, Δx_2, Δx_3, где Δ – определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, Δx_1, Δx_2, Δx_3 получены из Δ заменой столбцов коэффициентов при x_1, x_2, x_3 соответственно на столбец свободных членов. При этом, если

1) $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$ и $x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta}$;

2) $\Delta=\Delta x_1=\Delta x_2=\Delta x_3=0$, система несовместна или имеет бесконечное множество решений; 3) $\Delta=0$ и хотя бы один из Δx_1, Δx_2, Δx_3 отличен от нуля, система несовместна.

Матричная запись системы линейных уравнений (1) и ее матричное решение

Пусть A – матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных, B – столбец свободных членов и X – матрица столбец неизвестных, тогда

$A\cdot X = B$ – **матричная запись системы уравнений**, а

$X = A^{-1}\cdot B$ – **ее матричное решение**.

Пример 7. Систему линейных уравнений записать в матричной форме и решить с помощью обратной матрицы.

$$\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$$

Решение. Пусть A – матрица, составленная из коэффициентов, стоящих при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 31 \\ -43 \\ -20 \end{pmatrix}$$ – столбец свободных членов;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных.

В таких обозначениях исходную систему линейных уравнений перепишем в матричной форме $A\cdot X = B$. Помножим последнее равенство на A^{-1} слева, получим $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$, т.е. $X = A^{-1}\cdot B$.

Найдём матрицу A^{-1}.

Найдём алгебраические дополнения к элементам матрицы

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0&11\\3&4\end{vmatrix}=-33,\ \ A_{21}=-\begin{vmatrix}-5&0\\3&4\end{vmatrix}=20,\ \ A_{31}=\begin{vmatrix}-5&0\\0&11\end{vmatrix}=-55,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}4&11\\2&4\end{vmatrix}=6,\ \ A_{22}=\begin{vmatrix}7&0\\2&4\end{vmatrix}=28,\ \ A_{32}=-\begin{vmatrix}7&0\\4&11\end{vmatrix}=-77,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}4&0\\2&3\end{vmatrix}=12,\ \ A_{23}=-\begin{vmatrix}7&-5\\2&3\end{vmatrix}=-31,\ \ A_{33}=\begin{vmatrix}7&-5\\4&0\end{vmatrix}=20.$$

Определитель $|A| = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13}$,
$|A| = 7\cdot(-33) + (-5)\cdot 6 + 0\cdot 12 = -261$.

Итак, $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=-\dfrac{1}{261}\begin{pmatrix}-33&20&-55\\6&28&-77\\12&-31&20\end{pmatrix}$.

Найдём столбец неизвестных

$$X=A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{261}\begin{pmatrix}-33&20&-55\\6&28&-77\\12&-31&20\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}31\\-43\\-20\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{261}\begin{pmatrix}-33\cdot 31+20\cdot(-43)-55\cdot(-20)\\6\cdot 31+28\cdot(-43)-77\cdot(-20)\\12\cdot 31-31\cdot(-43)+20\cdot(-20)\end{pmatrix}=-\frac{1}{261}\begin{pmatrix}-783\\522\\1305\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -5$.
Ответ: (3; –2; –5).

Метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса, в отличие от двух предыдущих методов, применим для любых систем, где число неизвестных необязательно равно числу уравнений. Под расширенной матрицей системы будем понимать матрицу, включающую в себя столбец свободных членов (после черты). В результате элементарных преобразований строк расширенная матрица приводится к одному из трех случаев:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & .. & 0 & * \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & * & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{cccccc|c} * & .. & 0 & * & .. & * & * \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & * & * & .. & * & * \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} * & .. & 0 & * \\ 0 & .. & * & .. \\ 0 & .. & 0 & * \end{array}\right)$$

I II III

В первом случае система имеет единственное решение. Во втором случае система уравнений имеет бесконечное множество решений и в третьем она несовместна.

Теорема Кронекера-Капелли

Для того, чтобы система уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

При этом:

1) если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;

2) если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Если ранг матрицы системы меньше ранга расширенной матрицы, то система несовместна и решения не существует.

Нетрудно видеть, что на последнем рисунке в первом случае $r = r_1 = n$, во втором $r_1 = r < n$ и в третьем $r > r_1$, где r – ранг расширенной матрицы; r_1 – ранг матрицы системы и n – число неизвестных.

Пример 8.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение. Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\2&3&-4&20\\3&-2&-5&6\end{array}\right)(-2)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&7&-10&8\\0&4&-14&-12\end{array}\right)(-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&-1&18&32\\0&4&-14&-12\end{array}\right)\cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&1&-18&-32\\0&4&-14&-12\end{array}\right)(-4) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&1&-18&-32\\0&0&58&116\end{array}\right):58 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&3&6\\0&1&-18&-32\\0&0&1&2\end{array}\right)(18)(-3) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&0&0\\0&1&0&4\\0&0&1&2\end{array}\right)(2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&8\\0&1&0&4\\0&0&1&2\end{array}\right).$$

Таким образом, данная система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 4, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Ответ: (8; 4; 2).

Пример 9.

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \qquad .$$

Решение. Применим к расширенной матрице системы элементарные преобразования.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}6&0&2&2\\5&2&0&1\\1&-2&2&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&3\\5&2&0&1\\6&0&2&2\end{array}\right)(-5)(-6) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&3\\0&12&-10&-14\\0&12&-10&-16\end{array}\right)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&3\\0&12&10&-14\\0&0&0&-2\end{array}\right).$$

Число ненулевых строк в расширенной матрице равно трем, а в матрице системы (без столбца свободных членов) – двум.
$r = 3$, $r_1 = 2$, $r > r_1$, значит система несовместна.
Ответ: система несовместна.
Пример 10. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 38 \end{cases}.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & -3 & 9 & 38 \end{array}\right).$$

С помощью эквивалентных преобразований приведём матрицу к верхнетреугольному виду.

Шаг 1. Вычтем из второй строки первую, результат умножим на (–1/2):

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 4 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & -3 & 9 & 38 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Вычтем из третьей строки первую, умноженную на 2:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & -8 \\ 3 & 4 & -3 & 9 & 38 \end{array}\right).$$

Шаг 3. Вычтем из четвёртой строки первую, умноженную на 3:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & -6 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

Шаг 4. Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на 5, результат делим на 2:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -6 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

Шаг 5. Вычтем из четвёртой строки вторую:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & -6 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Шаг 6. Прибавим к четвёртой строке третью, умноженную на 6, результат делим на 17:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Теперь с помощью эквивалентных преобразований приведём матрицу к диагональному виду (обратный ход метода Гаусса).

Шаги 7, 8, 9. От третьей строки отнимем четвёртую, умноженную на 2; от второй строки отнимем четвёртую; от первой строки отнимем четвёртую.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Шаги 10, 11. От первой строки отнимем третью; от первой строки отнимем вторую.

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Теперь в последнем столбце получились искомые значения переменных, т.е.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 4.$$

Глава 2. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

§1. Векторы. Линейные операции над векторами

Вектор – направленный отрезок. Обозначение $\overline{a} = \overline{AB}$.
Длина (модуль) – длина отрезка AB. Обозначение длины $|\overline{a}| = |\overline{AB}|$ или $|\overline{a}| = a$.

Коллинеарные векторы – векторы, параллельные одной прямой.
Обозначения:
$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ – векторы сонаправлены;
$\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{c}$ – векторы противоположно направлены;
$\overline{a} \parallel \overline{b}$ – в общем случае (без указания взаимной направленности).

Равные векторы – векторы, удовлетворяющие условиям:
1) имеют одинаковую длину;
2) коллинеарны;
3) сонаправлены.

Компланарные векторы — векторы, параллельные одной плоскости.

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Сумма векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется по правилу треугольника или параллелограмма. Обозначение суммы $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ или $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на число λ называется вектор $\overline{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\overline{b}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}$ при $\lambda > 0$ и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$ при $\lambda < 0$.

Обозначение $\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}$.

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Два упорядоченных неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют **базис на плоскости**.

Три упорядоченных некомпланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют **базис в пространстве**.

Базис называется ортонормированным (**декартовым**), если базисные векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначение декартова базиса: $\overline{i}$, $\overline{j}$ – на плоскости; $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – в пространстве.

Разложить вектор по базису – значит представить его в виде **линейной комбинации** базисных векторов, т.е. в форме $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}$ или $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$.

Числа α, β, γ, (коэффициенты линейной комбинации) называются **координатами вектора** в данном базисе. Вектор может быть задан в координатной форме: $\overline{a} = (\alpha, \beta)$ – на плоскости; $\overline{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ – в пространстве.

Линейным операциям над векторами соответствуют те же линейные операции над их координатами.

$\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$; $\overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$;

$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3)$;

$\lambda\overline{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

Если даны координаты начала A и координаты конца B вектора $\overline{a} = \overline{AB}$, $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$, то
$\overline{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Условия коллинеарности и компланарности векторов в координатной форме:

1) $\overline{a} \parallel \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} = \lambda \overline{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

(координаты коллинеарных векторов пропорциональны);

2) $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

(определитель третьего порядка, составленный из координат компланарных векторов, равен 0).

Пример 1. Даны векторы $\overline{a}_1 = (1; 2; -1)$, $\overline{a}_2 = (1; 1; 2)$, $\overline{a}_3 = (2; 1; 3)$ и $\overline{b} = (3; 6; 1)$. Показать, что векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ образуют базис трехмерного пространства и найти координаты вектора $\overline{b}$ в этом базисе.

Решение. Вычислим определитель, составленный из координат векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$ и $\overline{a}_3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) = 4.$$

Так как $\Delta \neq 0$, векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$ некомпланарны и, следовательно, образуют базис. Разложим вектор $\overline{b}$ по базису.

$$\overline{b} = x \cdot \overline{a}_1 + y \cdot \overline{a}_2 + z \cdot \overline{a}_3,$$

где x, y, z – искомые координаты вектора $\overline{b}$ в базисе $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$.

Записав координаты векторов $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$, $\overline{b}$ в столбцы, представим разложение вектора $\overline{b}$ в виде

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Приравняв координаты векторов, стоящих в правой и левой частях равенства, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных x, y, z:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ 2x + y + z = 6, \\ -x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

Решаем систему уравнений, например, методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и применим к ней элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} (-2)(1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (3) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ :(-1) \\ :(-4) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ (-3)(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, $x = 2$, $y = 3$, $z = -1$.

Следовательно, $\overline{b} = 2 \cdot \overline{a}_1 + 3 \cdot \overline{a}_2 - \overline{a}_3$ или $\overline{b} = (2; 3; -1)$.

§2. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Обозначение $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$.

Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно выразить также формулой $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot \text{пр}_{\overline{a}}\overline{b}$ или $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cdot \text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$, где $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$ – проекция вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$.

Если векторы заданы координатами в декартовом базисе $\overline{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z)$, $\overline{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$, то скалярное произведение векторов равно сумме произведений их координат

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z.$$

С помощью скалярного произведения находят:

– длину вектора

$$|\,\overline{a}\,|=\sqrt{\overline{a}\cdot\overline{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\ ;$$

– расстояние между двумя точками

$$AB=\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ ;$$

– косинус угла между векторами

$$\cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Условие перпендикулярности (ортогональности) векторов:

$$\overline{a}\perp\overline{b}\quad\Leftrightarrow\quad\varphi=\frac{\pi}{2}+\pi n\quad\Leftrightarrow\quad\cos\varphi=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\overline{a}\cdot\overline{b}=0\quad\Leftrightarrow\quad a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3=0,$$

$(\left|\overline{a}\right|\neq 0,\left|\overline{b}\right|\neq 0)$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a}$;
2. $\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c}$;

3. $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$;

4. $\overline{\lambda a}\cdot\overline{b}=\overline{a}\cdot\overline{\lambda b}=\lambda\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})$;

5. $\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|^2$;

6. $\overline{a}\cdot\overline{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \overline{a}\perp\overline{b} \quad (\overline{a}\neq 0,\quad \overline{b}\neq 0)$ (критерий ортогональности векторов);

7. Работа силы $\overline{F}$, действующей на материальную точку при перемещении её из начала в конец вектора $\overline{s}$ вычисляется по формуле $A=\overline{F}\cdot\overline{s}$ (физический смысл).

§3. Векторное произведение

Векторным произведением $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$ такой, что

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$ – модуль $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) $\overline{c}\perp\overline{a}$, $\overline{c}\perp\overline{b}$ – вектор $\overline{c}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – правая.

Обозначение $\overline{c} = [\overline{a},\overline{b}]$ или $\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b}$.

Координаты вектора $\overline{c} = (c_x, c_y, c_z)$ в декартовом базисе вычисляются по формулам:

$$\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\overline{k}.$$

Свойства векторного произведения:

1. $\overline{a}\times\overline{b}=-(\overline{b}\times\overline{a})$;

2. $\overline{a}\times(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\times\overline{b}+\overline{a}\times\overline{c}$;

3. $(\overline{a}+\overline{b})\times\overline{c}=\overline{a}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{c}$;

4. $\overline{\lambda a} \times \overline{b} = \overline{a} \times \overline{\lambda b} = \lambda \cdot (\overline{a} \times \overline{b})$;

5. $\overline{a} \times \overline{a} = \overline{0}$;

6. $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} \parallel \overline{b}$ (критерий коллинеарности векторов).

§4. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$ или $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ называется число

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = (\overline{a} \times \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Абсолютная величина смешанного произведения $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

$$V = \left| (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) \right| = \pm \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения:

1. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}),\ (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b})$;
2. $(\lambda\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \lambda\overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a}, \overline{b}, \lambda\overline{c}) = \lambda(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$;
3. $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – компланарны.

Пример 1. Найти угол между векторами $\overline{p}, \overline{q}$, если

$\overline{p} = \overline{m} + 2\overline{n},\ \overline{q} = \overline{m} - \overline{n},$ где модули векторов $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 2$,

угол между векторами $\overline{m}, \overline{n}$ равен $\pi/3$.

Решение. Пусть $\varphi = \widehat{\overline{p}, \overline{q}}$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{\overline{p} \cdot \overline{q}}{|\overline{p}| \cdot |\overline{q}|}$.

Найдем скалярное произведение векторов $\overline{p}, \overline{q}$:

$\overline{p} \cdot \overline{q} = (\overline{m} + 2\overline{n}) \cdot (\overline{m} - \overline{n}) = \overline{m} \cdot \overline{m} + \overline{m} \cdot \overline{n} - 2\overline{n} \cdot \overline{n}$, где

$\overline{m} \cdot \overline{m} = |\overline{m}|^2 = 4$,

$\overline{n} \cdot \overline{n} = |\overline{n}|^2 = 4$, $\overline{m} \cdot \overline{n} = 2 \cdot 2 \cdot \cos(\pi/3) = 2$.

Тогда $\overline{p} \cdot \overline{q} = -2$. Модули векторов:

$|\overline{p}| = \sqrt{|\overline{p}|^2} = \sqrt{(\overline{m} + 2\overline{n})^2} = \sqrt{4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4} = 2\sqrt{7}$,

$|\overline{q}| = \sqrt{|\overline{q}|^2} = \sqrt{(\overline{m} - \overline{n})^2} = \sqrt{4 - 2 \cdot 2 + 4} = 2.$

$\cos\varphi = \dfrac{\overline{p} \cdot \overline{q}}{|\overline{p}| \cdot |\overline{q}|} = -\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$; $\varphi \approx 107^\circ$.

§5. Аналитическая геометрия на плоскости

1. Расстояние d между точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Деление отрезка в данном отношении λ. Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Координаты точки $N(x, y)$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении $\dfrac{M_1N}{NM_2} = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В частности, при делении пополам, т.е. $\lambda = 1$, имеем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Основные виды уравнений прямой на плоскости:

а) общее уравнение прямой:

l: $Ax + By + C = 0$,

$\overline{n} = (A, B)$ – нормальный вектор прямой, $\overline{n} \perp l$;

б) уравнение прямой с угловым коэффициентом

l: $y = kx + b$, k – угловой коэффициент, равный тангенсу угла α, который образует прямая с положительным направлением оси Ox, b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy;

в) уравнение прямой в отрезках

l: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$,

где a – абсцисса, b – ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy соответственно;

г) уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$

$$l\colon \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

д) уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ в данном направлении

l: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$, k – угловой коэффициент.

4. Взаимное расположение двух прямых $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$:

а) угол между прямыми:

$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$, где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты этих прямых; φ – угол, на который нужно повернуть первую прямую против часовой стрелки до совпадения со второй прямой;

б) признак параллельности двух прямых: $k_1 = k_2$;

в) признак перпендикулярности двух прямых: $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

5. Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Пример 2. Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(-1,\ 2)$, $B(3,8)$, $C(7,\ 4)$. Найти: 1) систему неравенств, определяющих множество точек треугольника ABC; 2) угол B в радианах с точностью до двух знаков; 3) уравнение высоты AD и ее длину; 4) уравнение медианы BE и координаты точки F пересечения этой медианы с высотой AD; 5) уравнение окружности, для которой высота AD есть диаметр.

Решение.

1. Любая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, для которых она является общей границей. Если граница определяется уравнением $ax + by + c = 0$, то полуплоскости определяются неравенствами:

$ax + by + c \le 0$ и $ax + by + c \ge 0$.

Выбрав произвольную точку M, не принадлежащую границе, подставим ее координаты в одно из данных неравенств; если неравенство удовлетворяется, то оно определяет полуплоскость, содержащую точку M, а если не удовлетворяется, то полуплоскость, не содержащую точку M. Очевидно, множество точек треугольника ABC можно рассматривать как пересечение трех полуплоскостей, из которых первая ограничена прямой AB и содержит точку C, вторая ограничена прямой BC и содержит точку A, третья ограничена прямой CA и содержит точку B.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, имеет вид

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (*)$$

Отсюда уравнения прямых AB, BC, CA:

$$\frac{y-2}{8-2}=\frac{x+1}{3+1};\ \frac{y-2}{6}=\frac{x+1}{4};\ 2y-3x-7=0 \qquad (AB)$$

$$\frac{y-8}{4-8}=\frac{x-3}{7-3};\ \frac{y-8}{-4}=\frac{x-3}{4};\ y+x-11=0 \qquad (BC)$$

$$\frac{y-4}{2-4}=\frac{x-7}{-1-7};\ \frac{y-4}{-2}=\frac{x-7}{-8};\ 4y-x-9=0 \qquad (CA).$$

Подставляя в левую часть уравнения AB координаты точки C, получим $2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 - 7 < 0$. Следовательно, первое искомое неравенство, которое определяет полуплоскость, ограниченную прямой AB и содержащую точку C, будет $2x - 3y - 7 \le 0$. Аналогично, вторая полуплоскость определяется неравенством $y + x - 11 \le 0$, а третья – неравенством $4y - x - 9 \ge 0$.

Итак, множество точек треугольника ABC определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 2y-3x-7\le 0, \\ y+x-11\le 0, \\ 4y-x-9\ge 0. \end{cases}$$

2. Решая уравнение прямой относительно y, получаем уравнение прямой с угловым коэффициентом. В нашем случае $y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ (AB), $y = -x + 11$ (BC), откуда $K_{AB} = \frac{3}{2}$, $K_{BC} = -1$.

Известно, что тангенс угла φ между двумя прямыми с угловым коэффициентом K_1 и K_2 определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{K_2 - K_1}{1 + K_1 \cdot K_2}.$$

Имеем $K_1 = K_{AB} = \frac{3}{2}$, $K_2 = K_{BC} = -1$. Находим тангенс угла B:

$$\operatorname{tg}\angle B = \frac{-1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2} \cdot (-1)} = 5, \quad \angle B = \operatorname{arctg} 5 \approx 1{,}37.$$

3. Ранее было найдено, что $K_{BC} = -1$. Отсюда $K_{DA} = 1$. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в заданном направлении, имеет вид

$y - y_1 = K \cdot (x - x_1)$.

Подставив в это уравнение координаты точки A и найденный угловой коэффициент высоты, получим уравнение прямой AD:

$y - 2 = 1 \cdot (x + 1)$, или $y = x + 3$.

Длину высоты AD найдем как расстояние от точки A до прямой BC по формуле

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

За (x_0, y_0) возьмем координаты точки A, а $ax + by + c = 0$ – уравнение прямой BC. Вычислим:

$$|AD| = \frac{|-1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 11|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$$

4. Чтобы найти уравнение медианы BE, определим сначала координаты точки E, которая является серединой стороны AC. Воспользуемся формулой деления отрезка на две равные части:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Имеем $x_E = \frac{-1+7}{2} = 3$, $y_E = \frac{2+4}{2} = 3$, т.е. $E(3, 3)$.

Подставив в (*) координаты точек B и E, находим уравнение медианы:

$$\frac{y-3}{8-3} = \frac{x-3}{3-3},\ \text{или}\ x - 3 = 0.$$

Чтобы найти координаты точки F пересечения медианы BE с высотой AD, решаем систему их уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x - 3 = 0, \\ &y - x - 3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда: $x = 3$, $y = 6$, т.е. $F(3, 6)$.

5. Так как $|AD|$ – это диаметр, то радиус искомой окружности равен $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Найдем координаты точки D как пересечение прямых AD и BC.

$$\begin{matrix} AD \\ BC \end{matrix}\begin{cases} y = x + 3, \\ y + x - 11 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3, \\ 0 = 2x - 8. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 4. \end{cases}$$

Пусть K – центр искомой окружности, K является серединой отрезка AD, находим координаты точки K:

$$x_K = \frac{x_A + x_D}{2} \qquad y_K = \frac{y_A + y_D}{2}$$

$$x_K = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2} \qquad y_K = \frac{2+7}{2} = \frac{9}{2}$$

Уравнение окружности с центром в точке $K(x_0, y_0)$ радиуса r имеет вид $(x—x_0)^2 + (y—y_0)^2 = r^2$.

Таким образом, уравнение искомой окружности

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{25}{2}.$$

Пример 3. В треугольнике *ABC* с вершинами *A*(9, 3), *B*(–7, –9), *C*(0, 15) найти уравнение биссектрисы *BN*.

Решение. Чтобы найти уравнение биссектрисы *BN*, найдём длины сторон ВС и ВА по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

$$|BC|=\sqrt{(0+7)^2+(15+9)^2}=25,$$

$$|BA|=\sqrt{(9+7)^2+(3+9)^2}=20.$$

По известному из школы свойству биссектрисы

$$\frac{BC}{BA}=\frac{CN}{NA}=\lambda;\ \lambda=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}.$$

Найдём координаты точки *N* как точки, делящей отрезок *AC* в соотношении λ:

$$x_N=\frac{x_C+\lambda x_A}{1+\lambda}=\frac{0+\frac{5}{4}\cdot 9}{1+\frac{5}{4}}=5,\ y_N=\frac{y_C+\lambda y_A}{1+\lambda}=\frac{15+\frac{5}{4}\cdot 3}{1+\frac{5}{4}}=\frac{25}{3}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки *B* и *N*:

$\dfrac{x+7}{5+7}=\dfrac{y+9}{\frac{25}{3}+9}$, или 13*x* – 9*y* + 10 = 0 уравнение биссектрисы *BN*.

Пример 4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(-6,-4)$ перпендикулярно прямой, содержащей точки $A(-10,1)$, $C(6,1)$.

Решение. Используем уравнение прямой с угловым коэффициентом $y=kx+b$. Тогда угловой коэффициент

$k = \dfrac{y_a - y_c}{x_a - x_c} = \dfrac{1-1}{-10-6} = 0$, т.е. прямая параллельна оси Ox.

Поэтому уравнение прямой, ей перпендикулярной, имеет вид: $x = -6$. (Замечание. Иначе, когда угловой коэффициент не равен 0, задача несколько усложняется. Угловой коэффициент прямой, ей перпендикулярной, равен $(-\dfrac{1}{k})$.

Уравнение перпендикулярной прямой

$y - y_B = -\dfrac{1}{k}(x - x_B)$).

§6. Аналитическая геометрия в пространстве

Уравнение плоскости *Q*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = (A, B, C)$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. $\overline{n}$ называется нормальным вектором плоскости.

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам $\overline{a}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\overline{a}_2 = (l_2, m_2, n_2)$, может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ параллельно вектору $\overline{a} = (l, m, n)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для двух плоскостей, заданных уравнениями
Q_1: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и Q_2: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

1) условие параллельности

$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

2) условие перпендикулярности

$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0;$$

3) угол между плоскостями

$$\cos(Q_1 \hat{,} Q_2) = \cos(\overline{n_1} \hat{,} \overline{n_2}) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Прямая *l* в пространстве задается как линия пересечения двух плоскостей

l: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ – общие уравнения прямой.

Уравнения прямой *l*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\overline{S} = (m, n, p)$,

$\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$, называются каноническими уравнениями прямой. Вектор $\overline{S}$ называется направляющим вектором прямой.

Замечание. Канонические уравнения прямой имеют смысл и в том случае, когда одна или две координаты направляющего вектора обращаются в нуль.

Для двух прямых, заданных каноническими уравнениями,

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

1) условие параллельности

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2};$$

2) условие перпендикулярности

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{S}_1 \perp \overline{S}_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0;$$

3) угол между прямыми

$$\cos(L_1 \widehat{,} L_2) = \cos(\overline{S_1} \widehat{,} \overline{S_2}) = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Для плоскости Q: $Ax + By + Cz + D = 0$

и прямой L: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$

1) условие параллельности

$$Q \parallel L \Leftrightarrow \overline{N} \perp \overline{S} \Leftrightarrow A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0;$$

2) условие перпендикулярности

$$\mathrm{Q} \perp \mathrm{L} \Leftrightarrow \overline{N} \parallel \overline{S} \Leftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4,5,1)$ и прямую $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$.

Решение. Выберем произвольную точку на данной прямой $B(x, y, z)$. Точка $C(1, 2, -2)$ лежит на данной прямой. Из условия компланарности векторов $\overline{AB} = (x-4,\ y-5,\ z-1)$, $\overline{AC} = (-3, -3, -3)$, $\overline{S} = (1, 2, 3)$ получаем уравнение искомой плоскости: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x-4 & y-5 & z-1 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$. Окончательно: $x - 2y + z + 5 = 0$.

Пример 6. Найти точку $M(x_0, y_0, z_0)$, симметричную относительно прямой $l: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1.5}{-1} = \dfrac{z}{1}$ точке $N(0,-3,-2)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через точку N и перпендикулярной прямой l:

$(x-0)-(y+3)+(z+2)=0$ или $x - y + z - 1 = 0$. Найдём координаты точки A пересечения этой плоскости с прямой l. Для этого запишем уравнения прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = -t-1{,}5 \\ z = t \end{cases}$, и подставим их в уравнение плоскости:

$t + 1 + t + 1{,}5 + t - 1 = 0,\ \ 3t + 1{,}5 = 0,\ \ t = -0{,}5.$

Значит: $A(0{,}5; -1; -0{,}5)$.

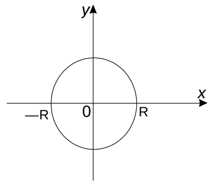
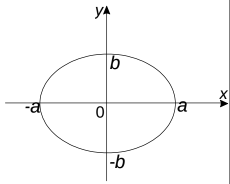
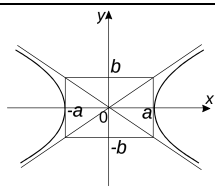
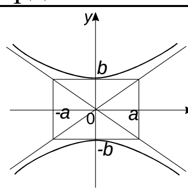
A – является основанием перпендикуляра, опущенного из точки $N(0,-3,-2)$ на прямую $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+2}{3}$. Найдем координаты точки $M(x_0, y_0, z_0)$. По условию задачи сумма векторов $\overline{AN}+\overline{AM}=0$, тогда

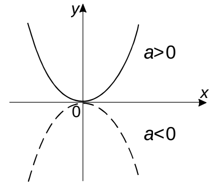
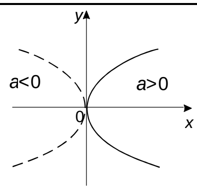
$x_0-0,5=0,5, \quad y_0+1=2, \quad z_0+0,5=1,5.$ Окончательно,

$x_0=1, y_0=1, z_0=1$.

§7. Канонические уравнения кривых второго порядка

Приведем канонические (простейшие) уравнения кривых второго порядка и их графики в виде следующей таблицы.

№ п/п	Название кривой	Уравнение кривой	График кривой
1	2	3	4
1	Окружность	$x^2 + y^2 = R^2$ R – радиус окружности (центр в начале координат)	
2	Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a, b – полуоси эллипса (центр в начале координат)	
3	Гипербола	а) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a, b – полуоси гиперболы (a – вещественная, b – мнимая)	
		Центр в начале координат	
		б) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ a, b – полуоси гиперболы (a – мнимая, b – вещественная)	

1	2	3	4
4	Парабола	а) $y = ax^2$ Вершина в начале координат б) $x = ay^2$	 

Уравнения кривых второго порядка с центром или вершиной (для параболы) в точке $C(x_0,\ y_0)$, не совпадающей в общем случае с началом координат без поворота осей относительно начала координат, имеют вид:

1. $(x—x_0)^2 + (y—y_0)^2 = R^2$ окружность;

2. $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ эллипс;

3. а) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, б) $-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

гиперболы;

4. а) $y - y_0 = a(x - x_0)^2$, б) $x - x_0 = a(y - y_0)^2$ параболы.

Пример 7. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $A(1,\ 4)$ и прямой $y = 2$. Полученное уравнение привести к простейшему виду. Сделать чертеж.

Решение. Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $y = 2$. Тогда абсцисса точки B равна абсциссе точки M, ордината точки B равна 2, т.е. $B(x, 2)$. В силу условий задачи $|AM| = |MB|$. Следовательно,

$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-2)^2}$.

Отсюда $(x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-x)^2 + (y-2)^2$,

$(x-1)^2 + y^2 - 8y + 16 = y^2 - 4y + 4$,

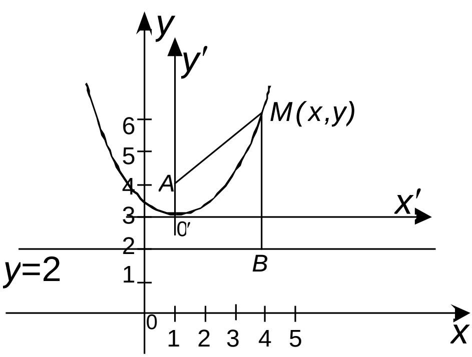
$(x-1)^2 = 4y - 12$,

$y - 3 = \frac{1}{4} \cdot (x-1)^2$.

Последнее уравнение определяет параболу с вершиной в точке $O'(1, 3)$. Чтобы уравнение привести к простейшему виду, положим $x' = x - 1$, $y' = y - 3$. Тогда уравнение примет вид

$$y' = \frac{1}{4} \cdot x'^2.$$

Простейший способ построения параболы на чертеже состоит в следующем. Вводим новую систему координат $x'O'y'$ с началом в точке O' и осями, параллельными осям Ox и Oy, и затем строим в новой системе параболу $y' = \frac{1}{4} \cdot x'^2$.



Пример 8. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $F(1,\ 0)$ и прямой $x = 4$ равно $\frac{1}{2}$. Сделать чертеж.

Решение. Пусть $M(x,\ y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $x = 4$. Тогда абсцисса точки B равна 4, ордината равна ординате точки M, т.е. $B(4,\ y)$.

В силу условий $|FM| = \frac{1}{2}|MB|$. Следовательно,

$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-4)^2+(y-y)^2}$. Отсюда

$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(x-4)^2,$$

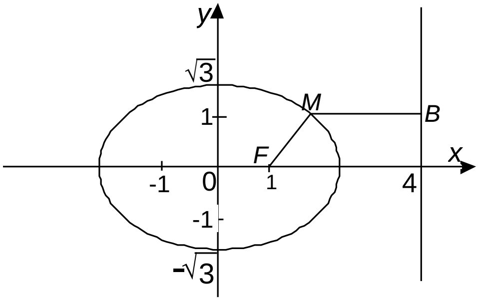
$$y^2 + x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4\ ,$$

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 3,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Последнее уравнение определяет эллипс с полуосями $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Фокусы эллипса расположены в точках $F_1(-c,\ 0)$, $F_2(c,\ 0)$,
где $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1$, т.е. $F_1(-1,\ 0)$, $F_2(1,\ 0)$.

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.



Пример 9. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до точки $F(-4, 0)$ и до прямой $x = -1$ равно 2. Сделать чертеж.

Решение. Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка искомого геометрического места точек. Пусть точка B – проекция точки M на прямую $x = -1$. Тогда абсцисса точки B равна –1, ордината равна ординате точки M, т.е. $B(-1, y)$. В силу условий $|FM| = 2\cdot|MB|$.

Следовательно, $\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2} = 2\sqrt{(x+1)^2+(y-y)^2}$.

Отсюда

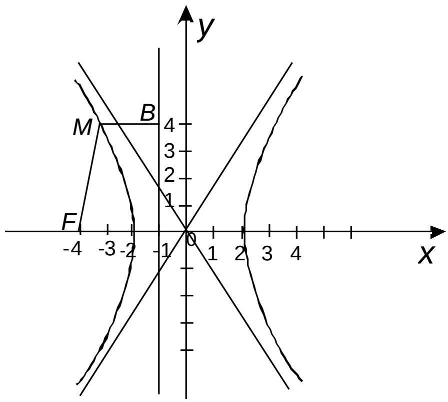
$$(x + 4)^2 + y^2 = 4\cdot(x + 1)^2,$$
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4,$$
$$3x^2 - y^2 = 12,$$
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Полученное уравнение определяет гиперболу, у которой $a = 2$,

$b = 2\sqrt{3}$. Фокусы гиперболы расположены в точках $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, где $c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$, т.е. $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 2$.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид: $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$, т.е. в нашем случае $y = \sqrt{3}x$ и $y = -\sqrt{3}x$.



Индивидуальное задание №1

Задача 1. Найти произведение матриц AB.

1. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 7 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 2 & 0 & 6\\ 5 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & -4 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & -3\\ 6 & 2\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 1\\ 4 & -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}7 & 0 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 6 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 5 & 6\\ -4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & -1\\ 3 & 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\\ 2 & 6\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\\ -1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3 & 4\\ 2 & -1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Решить систему уравнений методом Крамера.

1. $\begin{cases} 2x - 3y - 5z = 1, \\ 3x + y - 2z = -4, \\ x - 2y + z = 5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3, \\ x + y - 2z = 4, \\ 3x - 2y + 6z = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ 2x - y - 2z = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 3x + y - 3z = -1, \\ 2x - y + 5z = 3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x - y + 3z = -4, \\ 3x + 5y + z = 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 4x + 3y - z = 0, \\ 3x + y + z = 4, \\ x - 3y - z = -6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x - 2y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x - 3y - z = -5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = -1, \\ 2x + y - z = 3, \\ x - 2y - 3z = 4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ x - y + 2z = -4, \\ 2x + 2y + z = 4. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + y - 2z = 1, \\ 2x + 3y + z = 0, \\ x - 2y - z = 7. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 6, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = -1. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x+2y+3z=0, \\ x-y-2z=6. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x-4y-2z=-3, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-9. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3, \\ 2x+y-z=-5, \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 7x-5y=31, \\ 4x+11z=-43, \\ 2x+3y+4z=-20. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x+5y-z=-1, \\ 2x+y-2z=7, \\ x-4y+z=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+2y+4z=31, \\ 5x+y+2z=20, \\ 3x-y+z=9. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0, \\ x+y-2z=-7, \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x-3y-z=1, \\ 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+2y+z=8, \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x+y+z=2, \\ x+3y+z=5, \\ x+y+5z=-7. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+3y-13z=-6, \\ 4x-y+z=3, \\ 2x-y+3z=3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} 2x+y-z=-4, \\ 3x-2y+2z=1, \\ 2x-3y+z=-6. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x+y-z=-2, \\ 4x-3y+z=1, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$

Задача 3. Найти матрицу, обратную данной матрице A. Проверить результат, вычислив произведение данной и полученной матрицы.

1. $A=\begin{pmatrix}-6 & 4 & 3\\ 3 & -2 & -1\\ 11 & -7 & -5\end{pmatrix}$ **2.** $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & -5\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$ **4.** $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & -23\\ -2 & -1 & 7\\ -1 & -1 & 5\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ **6.** $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 1\\ 4 & -7 & 0\end{pmatrix}$

7. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\\ 5 & -2 & -11\\ 3 & -1 & -7\end{pmatrix}$ **8.** $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ **10.** $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{pmatrix}$ **12.** $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 3 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$ **14.** $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ **16.** $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 3 & 7 & 4\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

17. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **18.** $A=\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **20.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$ **22.** $A=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

23. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **24.** $A=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 19 & 16 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

25. $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ **26.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

27. $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **28.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

29. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **30.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 4. Систему линейных уравнений записать в матричном виде и решить с помощью обратной матрицы.

1. $\begin{cases} 3x + y - 2z = 1, \\ x - 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y - z = -4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 3, \\ x + 2y + z = 2, \\ x - 3y + 4z = -1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 3y - z = 1, \\ 2x + y + z = -7, \\ 2x - y - 3z = 5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y + z = 4, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 4y - z = -2. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + y + 2z = -4, \\ x - 2y - z = -1, \\ 2x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 1, \\ x + 2y + z = 8, \\ 4x - 3y - 2z = -1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ x - y - 2z = 6. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x + 3y + 2z = -1, \\ 2x + y - z = 3, \\ x - 2y - 3z = 4. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = 3, \\ 2x + y - z = -5, \\ 5x - y + 3z = 4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x - 2y + z = -1, \\ 2x + y + 2z = 6, \\ x - 3y - z = -5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + 5y - z = -1, \\ 2x + y - 2z = 7, \\ x - 4y + z = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = -9, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0, \\ x + y - 2z = -7, \\ x - 2y + 3z = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x + 2y - z = 3, \\ x - y + 2z = -4, \\ 2x + 2y + z = 4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20, \\ 3x-2y-5z=6. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+3y+z=0, \\ x-2y-z=7. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x-3y+z=3, \\ x+y-2z=4, \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x-y-z=4, \\ 3x+4y-2z=11, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 3x+y-3z=-1, \\ 2x-y+5z=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x+2y+4z=31, \\ 5x+y+2z=20, \\ 3x-y+z=9. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x-4y-2z=-3, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-9. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1, \\ 3x+y+z=3, \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x+4z=13, \\ 2x+y+11z=36, \\ 2x-y+6z=20. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x+2y-4z=-7, \\ x-y+2z=8, \\ 2x+2y+z=16. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -x+3y-z=2, \\ x-2y+3z=6, \\ 3x-y+2z=7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 6x-z=2, \\ -x-y+z=-1, \\ x-2y+3z=5. \end{cases}$

Задача 5. Найти ранг матрицы.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **2.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 5 & 16 & -13 & 11 & 5 \\ 1 & -12 & 11 & -5 & -3 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. **4.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. **6.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 7 & 4 & 3 & -3 \\ 5 & 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$. **8.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. **10.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -9 & -13 & 0 \\ 7 & 9 & 17 & 12 \end{pmatrix}$. **12.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **14.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **16.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -6 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -9 & 5 & 11 & 2 \\ 1 & -7 & 4 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. **18.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 14 & -8 & -6 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 18 & 7 \\ 1 & 6 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. **20.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 10 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & -28 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. **22.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 13 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. **24.** $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 7 & 6 & 8 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & -6 \end{pmatrix}$. **26.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 1 & 5 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$. **28.** $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **30.** $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Исследовать систему линейных уравнений на совместность и решить её, если она совместна.

1. $\begin{cases} 5x-2y+z=2, \\ 2x+y=8, \\ 8x-5y+2z=-4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x+y-4z=0, \\ -3x-3y+7z=-1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+y+3z=0, \\ x-2y-2z=7, \\ 4x-3y-z=5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x+3y+2z=1, \\ x+3y+5z=1, \\ 3x+6y+9z=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x-2y+3z=1, \\ 2x+y-z=3, \\ 5y-7z=4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x-3y+z=2, \\ 3x-5y+z=-3, \\ 5x-8y+6z=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-2y+3z=1, \\ x+3y=2, \\ -8y+3z=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 5x+4y+z=6, \\ 3x-y-2z=-5, \\ 2x+5y+3z=-1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x-y-4z=3, \\ x-3y=4, \\ 5y-4z=-5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-y+3z=4, \\ 3x-2y+2z=3, \\ 5x-4y=2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-2y+3z=4, \\ -2x+4z=1, \\ -4y+10z=2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x+2z=2, \\ 5x+2y=1, \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -4x+3y+z=1, \\ -x+3z=2, \\ 11x-9y=3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x+2z=2, \\ 5x+2z=1, \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 5x - y + 2z = 2, \\ 4x + 3y = 3, \\ 19x + 6z = 4. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + z = 1, \\ 5x + 2y = 1, \\ 11x + 2y + 6z = 5. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x - 5y + z = -1, \\ 2x + y - z = 4, \\ 4x - 4z = -2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} -x + 2y - z = 4, \\ 3x + y + 2z = -1, \\ 2x - 11y + 3z = -19. \end{cases}$

19. $\begin{cases} -5x + 4y + z = 1, \\ 3x + 2y - 2z = 0, \\ -7x + 10y = -4. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x + 2z = 2, \\ 5x + 2y = 1, \\ x - 2y + 12z = 3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -3x - y + 2z = 4, \\ 4x + 2y + 4z = -2, \\ -2x + 7z = 6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 12x + 2z = 2, \\ 5x + 2y = 1, \\ x - 2y + z = 3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 5x + 6y + 7z = 2, \\ x + 3y + 5z = 1, \\ 4x + 9y + 14z = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 4, \\ x - 2y + 3z = 2, \\ 9x - 7y + 16z = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x - 23y + 29z = 4, \\ 7x + 3y + 4z = 7, \\ 5x + 2y + 3z = 5. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1, \\ 2x + z = -1, \\ x - 2y = -2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + 3y - 4z = 15, \\ 2x - 7y + 3z = -7, \\ 3x - 4y - z = 14. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ 3x - 2y + z = -6, \\ 4x + 4z = -9. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3, \\ 3x + 2y + z = 6, \\ 2x - 2z = 3. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + z = 7, \\ 5x + 4y + 3z = 14. \end{cases}$

Задача 7. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -4, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -6. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -9, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -10. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -8, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 = -12, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 = -26. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 12, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 14, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -7, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$ **14.** $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -11, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 13. \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -10, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -13, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -4. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -13, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -5, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 17. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 19, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -20, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 6, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 12. \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 = -4. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 23, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = -18. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 7, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 - 12x_4 = 22. \end{cases}$ **26.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$ **28.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -8, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = -9, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 8, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 5. \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 6, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

Индивидуальное задание №2

Задача 1. Доказать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис, и разложить вектор $\bar{d}$ по этому базису.

1. $\bar{a} = \{1,3,2\}$, $\bar{b} = \{2,2,3\}$, $\bar{c} = \{3,1,1\}$, $\bar{d} = \{3,5,2\}$.

2. $\bar{a} = \{1,3,4\}$, $\bar{b} = \{2,2,-1\}$, $\bar{c} = \{3,1,-1\}$, $\bar{d} = \{2,-6,-9\}$.

3. $\bar{a} = \{1,3,5\}$, $\bar{b} = \{1,2,3\}$, $\bar{c} = \{1,1,3\}$, $\bar{d} = \{2,7,14\}$.

4. $\bar{a} = \{-1,1,3\}$, $\bar{b} = \{3,-2,-1\}$, $\bar{c} = \{-1,3,2\}$, $\bar{d} = \{2,6,7\}$.

5. $\bar{a} = \{2,1,4\}$, $\bar{b} = \{2,-2,5\}$, $\bar{c} = \{1,-1,3\}$, $\bar{d} = \{1,5,1\}$.

6. $\bar{a} = \{3,1,4\}$, $\bar{b} = \{2,2,-1\}$, $\bar{c} = \{1,3,1\}$, $\bar{d} = \{8,12,6\}$.

7. $\bar{a} = \{2,1,1\}$, $\bar{b} = \{1,3,1\}$, $\bar{c} = \{1,1,5\}$, $\bar{d} = \{1,4,-12\}$.

8. $\bar{a} = \{2,1,4\}$, $\bar{b} = \{1,3,1\}$, $\bar{c} = \{1,1,1\}$, $\bar{d} = \{2,5,4\}$.

9. $\bar{a} = \{2,3,2\}$, $\bar{b} = \{1,-2,-3\}$, $\bar{c} = \{-1,2,1\}$, $\bar{d} = \{-4,1,-6\}$.

10. $\bar{a} = \{1,2,2\}$, $\bar{b} = \{2,-1,-1\}$, $\bar{c} = \{-3,1,3\}$, $\bar{d} = \{2,1,3\}$.

11. $\bar{a} = \{1,2,3\}$, $\bar{b} = \{3,-2,-1\}$, $\bar{c} = \{-4,3,1\}$, $\bar{d} = \{4,5,9\}$.

12. $\bar{a} = \{1,1,1\}$, $\bar{b} = \{-2,2,-3\}$, $\bar{c} = \{3,5,-1\}$, $\bar{d} = \{-5,-5,2\}$.

13. $\bar{a} = \{3,2,1\}$, $\bar{b} = \{-4,4,2\}$, $\bar{c} = \{2,-1,-1\}$, $\bar{d} = \{5,-8,-5\}$.

14. $\bar{a} = \{3,3,1\}$, $\bar{b} = \{4,-2,3\}$, $\bar{c} = \{2,-1,1\}$, $\bar{d} = \{17,5,8\}$.

15. $\bar{a} = \{3,2,1\}$, $\bar{b} = \{-3,-1,1\}$, $\bar{c} = \{2,1,1\}$, $\bar{d} = \{10,5,-1\}$.

16. $\bar{a} = \{1,2,-1\}$, $\bar{b} = \{-1,1,2\}$, $\bar{c} = \{2,-1,1\}$, $\bar{d} = \{0,10,8\}$.

17. $\bar{a} = \{2,1,3\}$, $\bar{b} = \{3,1,-2\}$, $\bar{c} = \{-4,-1,3\}$,
$\bar{d} = \{-17,-4,17\}$.

18. $\overline{a}=\{1,2,2\}$, $\overline{b}=\{-2,-1,3\}$, $\overline{c}=\{2,1,1\}$, $\overline{d}=\{-4,1,9\}$.

19. $\overline{a}=\{1,-2,-1\}$, $\overline{b}=\{-2,3,-1\}$, $\overline{c}=\{1,1,1\}$, $\overline{d}=\{-2,9,3\}$.

20. $\overline{a}=\{1,2,2\}$, $\overline{b}=\{1,0,-1\}$, $\overline{c}=\{1,2,3\}$, $\overline{d}=\{-5,-6,-3\}$.

21. $\overline{a}=\{3,1,1\}$, $\overline{b}=\{-2,3,-1\}$, $\overline{c}=\{1,-2,2\}$, $\overline{d}=\{8,4,4\}$.

22. $\overline{a}=\{6,-1,1\}$, $\overline{b}=\{0,-1,-2\}$, $\overline{c}=\{-1,1,3\}$, $\overline{d}=\{2,-1,5\}$.

23. $\overline{a}=\{1,1,2\}$, $\overline{b}=\{2,-1,2\}$, $\overline{c}=\{-4,2,1\}$, $\overline{d}=\{-7,8,16\}$.

24. $\overline{a}=\{1,1,2\}$, $\overline{b}=\{3,-1,4\}$, $\overline{c}=\{1,2,-1\}$, $\overline{d}=\{1,6,1\}$.

25. $\overline{a}=\{2,3,1\}$, $\overline{b}=\{1,-1,3\}$, $\overline{c}=\{3,2,2\}$, $\overline{d}=\{3,-3,11\}$.

26. $\overline{a}=\{1,3,2\}$, $\overline{b}=\{4,5,-1\}$, $\overline{c}=\{-2,-2,1\}$, $\overline{d}=\{13,19,0\}$.

27. $\overline{a}=\{1,-2,1\}$, $\overline{b}=\{3,1,2\}$, $\overline{c}=\{1,2,2\}$, $\overline{d}=\{3,12,2\}$.

28. $\overline{a}=\{2,1,1\}$, $\overline{b}=\{1,3,1\}$, $\overline{c}=\{1,1,4\}$, $\overline{d}=\{5,9,-3\}$.

29. $\overline{a}=\{2,3,2\}$, $\overline{b}=\{1,-2,-3\}$, $\overline{c}=\{-1,2,1\}$, $\overline{d}=\{-4,1,-6\}$.

30. $\overline{a}=\{2,1,4\}$, $\overline{b}=\{1,-2,-3\}$, $\overline{c}=\{3,-2,-1\}$, $\overline{d}=\{0,7,5\}$.

Задача 2.

1–10. Найти угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

1. $\overline{a}=\overline{m}+2\overline{n}$, $\overline{b}=\overline{m}-\overline{n}$, $|\overline{m}|=|\overline{n}|=2$, $(\overline{m}\,\hat{}\,\overline{n})=\dfrac{\pi}{3}$.

2. $\overline{a}=3\overline{p}-\overline{q}$, $\overline{b}=\overline{p}+2\overline{q}$, $|\overline{p}|=1$, $|\overline{q}|=2$, $(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q})=\dfrac{\pi}{3}$.

3. $\overline{a}=\overline{p}+2\overline{q}$, $\overline{b}=3\overline{p}-\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=1$, $(\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q})=\dfrac{2\pi}{3}$.

4. $\overline{a} = 3\overline{p} - 2\overline{q},\ \overline{b} = \overline{p} + \overline{q},\ |\overline{p}| = 1,\ |\overline{q}| = 1,\ (\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}) = \dfrac{\pi}{3}.$

5. $\overline{a} = 3\overline{n} + \overline{m},\ \overline{b} = \overline{n} - 2\overline{m},\ |\overline{n}| = 1,\ |\overline{m}| = 2,\ (\overline{n},\hat{}\ \overline{m}) = \dfrac{\pi}{4}.$

6. $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q},\ \overline{b} = 3\overline{p} - \overline{q},\ |\overline{p}| = 1,\ |\overline{q}| = 2,\ (\overline{p},\hat{}\ \overline{q}) = \dfrac{\pi}{6}.$

7. $\overline{a} = 3\overline{p} + \overline{q},\ \overline{b} = \overline{p} - 2\overline{q},\ |\overline{p}| = 4,\ |\overline{q}| = 1,\ (\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

8. $\overline{a} = \overline{p} - 3\overline{q},\ \overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q},\ |\overline{p}| = 2,\ |\overline{q}| = 3,\ (\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}) = \dfrac{3\pi}{4}.$

9. $\overline{a} = 3\overline{p} + 2\overline{q},\ \overline{b} = 2\overline{p} - \overline{q},\ |\overline{p}| = 4,\ |\overline{q}| = 3,\ (\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}) = \dfrac{3\pi}{4}.$

10. $\overline{a} = 2\overline{p} - 3\overline{q},\ \overline{b} = 5\overline{p} + \overline{q},\ |\overline{p}| = 2,\ |\overline{q}| = 3,\ (\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}) = \dfrac{\pi}{2}.$

11. Вычислить проекцию вектора $3\overline{a} - \overline{b}$ на вектор $\overline{c}$. $|\overline{a}| = 1,\ |\overline{b}| = 1,\ |\overline{c}| = 2,\ (\overline{a}\,\hat{}\,\overline{c}) = \dfrac{5\pi}{6},\ (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{c}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

12. Вычислить проекцию вектора $\overline{c} - 2\overline{d}$ на вектор $\overline{a}$. $|\overline{a}| = 1,\ |\overline{d}| = 1,\ |\overline{c}| = 3,\ (\overline{c}\,\hat{}\,\overline{a}) = \dfrac{3\pi}{4},\ (\overline{d}\,\hat{}\,\overline{a}) = \dfrac{3\pi}{4}.$

13. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ на вектор $2\overline{a} + \overline{b}$. $|\overline{a}| = 2,\ |\overline{b}| = 4,\ (\overline{b}\,\hat{}\,\overline{a}) = \dfrac{\pi}{3}.$

14. Найти проекцию вектора $2\overline{p} + \overline{q}$ на вектор $\overline{q}$. $|\overline{p}| = 2,$ $|\overline{q}| = 1,\ (\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}) = \dfrac{\pi}{3}.$

15. Найти проекцию вектора $6\overline{p} - \overline{q}$ на вектор $\overline{p}$. $|\overline{p}| = 4,$

$\left|\overline{q}\right| = 3,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{3\pi}{4}.$

16. Найти проекцию вектора $\overline{a} = 2\overline{p} - \overline{q}$ на вектор $\overline{b} = \overline{p} + 3\overline{q}$. $\left|\overline{p}\right| = 3,\ \left|\overline{q}\right| = 2,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{2}.$

17. Найти проекцию вектора $\overline{a} = 2\overline{p} - 3\overline{q}$ на вектор $\overline{b} = 3\overline{p} + \overline{q}$. $\left|\overline{p}\right| = 4,\ \left|\overline{q}\right| = 1,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{3}.$

18. Вычислить проекцию вектора $3\overline{a} - \overline{b}$ на вектор $\overline{a}$. $\left|\overline{a}\right| = 1,\ \left|\overline{b}\right| = 2,\ (\overline{b}\hat{\ }\overline{a}) = \dfrac{2\pi}{3}.$

19–30. Вычислить работу силы $\overline{F}$, если её точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается вдоль вектора $\overline{a}$.

19. $\overline{F} = 6\overline{p} - \overline{q},\ \overline{a} = \overline{p} + 5\overline{q},\ \left|\overline{p}\right| = \dfrac{1}{2},\ \left|\overline{q}\right| = 4,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

20. $\overline{F} = 3\overline{p} + \overline{q},\ \overline{a} = \overline{p} - 3\overline{q},\ \left|\overline{p}\right| = 7,\ \left|\overline{q}\right| = 2,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

21. $\overline{F} = 7\overline{p} - 2\overline{q},\ \overline{a} = \overline{p} + 3\overline{q},\ \left|\overline{p}\right| = \dfrac{1}{2},\ \left|\overline{q}\right| = 2,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{2}.$

22. $\overline{F} = \overline{p} + 3\overline{q},\ \overline{a} = 3\overline{p} - \overline{q},\ \left|\overline{p}\right| = 3,\ \left|\overline{q}\right| = 5,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{2\pi}{3}.$

23. $\overline{F} = \overline{p} + 4\overline{q},\ \overline{a} = 2\overline{p} - \overline{q},\ \left|\overline{p}\right| = 7,\ \left|\overline{q}\right| = 2,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{3}.$

24. $\overline{F} = 10\overline{p} + \overline{q},\ \overline{a} = 3\overline{p} - 2\overline{q},\ \left|\overline{p}\right| = 4,\ \left|\overline{q}\right| = 1,\ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{6}.$

25. $\overline{F} = 2\overline{p} + 3\overline{q}, \ \overline{a} = -\overline{p} + 2\overline{q}, \ |\overline{p}| = 2, \ |\overline{q}| = 3, \ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{4}.$

26. $\overline{F} = 7\overline{m} + 5\overline{n}, \ \overline{a} = -\overline{m} + 3\overline{n}, \ |\overline{m}| = 1, \ |\overline{n}| = 2, \ (\overline{m}\hat{\ }\overline{n}) = \dfrac{2\pi}{3}.$

27. $\overline{F} = 3\overline{m} + 2\overline{n}, \ \overline{a} = -\overline{m} + \overline{n}, \ |\overline{m}| = 1, \ |\overline{n}| = 2, \ (\overline{m}\hat{\ }\overline{n}) = \dfrac{\pi}{3}.$

28. $\overline{F} = 3\overline{p} - \overline{q}, \ \overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}, \ |\overline{p}| = 2, \ |\overline{q}| = 2, \ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{\pi}{6}.$

29. $\overline{F} = -\overline{m} + 3\overline{n}, \ \overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}, \ |\overline{m}| = 3, \ |\overline{n}| = 3, \ (\overline{m}\hat{\ }\overline{n}) = \dfrac{\pi}{4}.$

30. $\overline{F} = 2\overline{p} - \overline{q}, \ \overline{a} = \overline{p} + \overline{q}, \ |\overline{p}| = 2, \ |\overline{q}| = 1, \ (\overline{p}\hat{\ }\overline{q}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти: 1) угол между рёбрами A_1A_2 и A_1A_4; 2) площадь грани $A_1A_2A_3$; 3) проекцию вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4; 4) объём пирамиды.

1. $A_1(8, 6, 4)$, $A_2(10, 5, 5)$, $A_3(5, 6, 8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

2. $A_1(4, 4, 10)$, $A_2(7, 10, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 9)$.

3. $A_1(4, 6, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$.

4. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(5, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$.

5. $A_1(10, 6, 6)$, $A_2(-2, 8, 2)$, $A_3(6, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

6. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$.

7. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$.

8. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(5, 7, 7)$, $A_3(5, 3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$.

9. $A_1(8, 6, 4)$, $A_2(10, 5, 5)$, $A_3(5, 6, 8)$, $A_4(8, 10, 7)$.

10. $A_1(7, 7, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$.

11. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

12. $A_1(3, 3, 9)$, $A_2(6, 9, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.
13. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 9, 9)$, $A_4(6, 4, 8)$.
14. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(7, 6, 3)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$.
15. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.
16. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(4, 1, 5)$, $A_3(4, 6, 3)$, $A_4(3, 9, 8)$.
17. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(3, 8, 4)$, $A_3(3, 5, 10)$, $A_4(5, 8, 2)$.
18. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$.
19. $A_1(7, 5, 3)$, $A_2(9, 4, 4)$, $A_3(4, 5, 7)$, $A_4(7, 9, 6)$.
20. $A_1(6, 6, 2)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(2, 4, 7)$, $A_4(7, 3, 0)$.
21. $A_1(1, 8, 0)$, $A_2(0, -4, 5)$, $A_3(-5, 7, 8)$, $A_4(1, 4, 3)$.
22. $A_1(4, 7, 9)$, $A_2(-1, -4, -5)$, $A_3(-3, 3, 1)$, $A_4(5, -6, 10)$.
23. $A_1(-1, 0, 7)$, $A_2(5, 3, 9)$, $A_3(3, 8, 5)$, $A_4(1, 3, 1)$.
24. $A_1(1, 5, 7)$, $A_2(2, 4, 0)$, $A_3(0, -7, 8)$, $A_4(3, 3, 4)$.
25. $A_1(3, 4, 0)$, $A_2(3, 10, 8)$, $A_3(0, 0, 5)$, $A_4(-1, 0, 2)$.
26. $A_1(0, 7, 0)$, $A_2(-1, 8, 5)$, $A_3(-4, 0, 3)$, $A_4(3, 8, -1)$.
27. $A_1(3, -2, 0)$, $A_2(5, 2, 4)$, $A_3(8, 9, 3)$, $A_4(-5, 5, -1)$.
28. $A_1(3, 0, 3)$, $A_2(-1, 4, 7)$, $A_3(-2, 3, -1)$, $A_4(5, 6, 0)$.
29. $A_1(-2, 3, 0)$, $A_2(3, -1, 3)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 1, 1)$.
30. $A_1(-3, 1, 5)$, $A_2(4, -3, 1)$, $A_3(6, 1, 5)$, $A_4(-8, 6, 0)$.

Задача 4.

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(-6, -4)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $A(-10, -1)$ и $C(6, 1)$.

2. На прямой $2x + y + 11 = 0$ найти точку, равноудалённую от двух заданных точек $A(1, 1)$ и $B(3, 0)$.

3. Найти точку, симметричную точке $(2, -4)$ относительно прямой $4x + 3y + 1 = 0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,\ 7)$ и середину отрезка, соединяющего точки $B(3,\ 4)$ и $C(15,\ 8)$.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,\ -1)$ параллельно прямой, проходящей через точки $B(8,\ 7)$ и $C(-10,\ 4)$.

6. Составить уравнение диаметра окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-1,\ 1)$, $B(2,\ -1)$, $C(4,\ 0)$, проходящего через точку $A(-1,\ 1)$.

7. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1,\ 1)$ под углом $45°$ к данной прямой.

8. На продолжении отрезка AB с координатами $A(-5,\ 5)$, $B(1,\ -4)$ найти точку, абсцисса которой равна 9.

9. Дан треугольник $A(-2,\ 3)$, $B(1,\ 2)$, $C(5,\ 4)$. Найти уравнение его высоты, опущенной из вершины C.

10. При каком значении C прямая $15x+17y+C=0$ будет проходить через точку пересечения прямых $2x+3y-5=0$, $7x-8y+1=0$?

11. Зная уравнения сторон параллелограмма $y=2x+1$, $y=2x-5$, $y=x-2$, $y=x+2$, найти уравнение его диагонали, для которой $k>0$.

12. Какую ординату имеет точка C, лежащая на одной прямой с точками
$A(-8,\ -6)$ и $B(-3,\ -1)$ и имеющая абсциссу $x=5$?

13. Через точку пересечения прямых $x+2y-6=0$, $2x-y-5=0$ провести прямую, параллельную прямой

$3x-4y+9=0$.

14. Через точку пересечения прямых $4x-5y+9=0$, $x+4y-3=0$ провести прямую, перпендикулярную прямой $3x-4y+9=0$.

15. Дан треугольник $A(3,\ 2)$, $B(5,\ –2)$, $C(1,\ 0)$. Составить уравнение медианы угла B.

16. Определить, при каком значении m прямые $mx+8y-7=0$ и $2x+my-1=0$ параллельны.

17. Определить, при каком значении m прямые $mx+2y+5=0$ и $2x+my-3=0$ перпендикулярны.

18. При каком значении m прямые $(m-1)x+my-5=0$ и $mx+(2m-1)y+7=0$ пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс?

19. Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$ параллельна оси ординат, и написать её уравнение ($a > 0$).

20. Составить уравнение прямой, проходящей через т. $M(2,\ –3)$ параллельно прямой $2x+3y=0$.

21. Дана прямая $5x-y+7=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,\ 1)$ под углом 45° к данной прямой ($k > 0$).

22. Найти точку Q, симметричную точке Р(1, –2) относительно прямой $2x-3y-3=0$.

23. Даны точки $P(–1,\ 2)$ и $Q(0,\ 3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку Q перпендикулярно отрезку PQ.

24. Дан треугольник $A(1, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(3, 5)$. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины C на медиану, проведённую из вершины A.

25. Определить точку пересечения прямой, проходящей через точки $M_1(2, -2)$ и $M_2(3, -5)$ с осью OY.

26. Через точки $M_1(2, 1)$ и $M_2(5, 3)$ проведена прямая. Найти основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

27. Найти проекцию точки $M_1(2, 1)$ на прямую, проходящую через точку $M_2(5, 3)$ и $M_3(3, -4)$.

28. Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 1)$ и пересекающей данную прямую в точке M_1, ордината которой равна нулю.

29. Найти уравнение высоты, опущенной из вершины B треугольника ABC: $A(3, 2)$, $B(5, -2)$, $C(1, 0)$.

30. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4, 5)$ и составляющей с осью абсцисс угол, вдвое больший, чем составляет с этой осью прямая $7x-y+8=0$.

Задача 5.

1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-2; 3; 8)$, параллельно отрезку AB, где $A(4; 3; 1)$, $B(-2; 2; 9)$.

2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 4; -5)$ и перпендикулярной двум прямым $\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z}{-1}$ и $\dfrac{x+5}{7}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+8}{2}$.

3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку

$M(-4;0;3)$ и параллельной прямой $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x-2y+z=14. \end{cases}$

4. Через точку $M(8;-5;13)$ провести прямую, параллельную оси OZ.

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(8;7;1)$ и параллельной прямой, проходящей через точки $A(-1;2;6)$ и $B(0;5;4)$.

6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-1;1)$ и перпендикулярно плоскости $x+3y-2z-12=0$.

7. При каком значении C прямая $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ параллельна плоскости $2x-2y+Cz-7=0$?

8. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3;-7;6)$ и перпендикулярной двум прямым $\frac{x-3}{5}=\frac{y+4}{3}=\frac{z}{-1}$ и $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{7}=\frac{z-6}{2}$.

9. При каком A вектор $\overline{a}\{1;-5;0\}$ параллелен плоскости $Ax-3y+7z+2=0$?

10. Найти точку M', симметричную точке $M(0, -3, -2)$ относительно прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1{,}5}{-1}=\frac{z}{1}$.

11. При каком значении C прямая $\frac{x+3}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-6}{4}$ параллельна плоскости $2x-2y+Cz+8=0$?

12. Найти точку M', симметричную точке $M(2, -1, 1)$ относительно прямой $\dfrac{x-4,5}{1}=\dfrac{y+3}{-0,5}=\dfrac{z-2}{1}$.

13. Найти точку M', симметричную точке $M(1,\ 1,\ 1)$ относительно прямой $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1,5}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$.

14. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-2;1)$, параллельно отрезку AB, где $A(3;-7;4)$, $B(-1;2;0)$.

15. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;2;-1)$ и параллельной прямой $\begin{cases}3x-4y+z-5=0,\\ x+y-2z+8=0.\end{cases}$

16. При каком значении m вектор $\overline{AB}$ параллелен плоскости $3x+6y+2z-4=0$, если $A(3;0;1)$, $B(2;m;-5)$?

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2;1;7)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-4}$.

18. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;-3;1)$ и перпендикулярно плоскости $3x-4y-z+8=0$.

19. При каком значении l прямая $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-2}{l}$ параллельна плоскости $x-2y+2z+6=0$?

20. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;-3;2)$ и перпендикулярной двум прямым

$$\frac{x-12}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-4}{-2} \text{ и } \frac{x+7}{4}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z+2}{5}.$$

21. При каком значении B вектор $\overline{a}\{3;-1;7\}$ параллелен плоскости

$x+By+z-6=0$?

22. При каком значении m прямая $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{m}=\frac{z}{3}$ параллельна плоскости $4x-y+6z-7=0$?

23. При каком значении B плоскости $3x+By-2z-7=0$ и $2x-2y-7z+1=0$ перпендикулярны?

24. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3;8)$ параллельно прямой $\frac{x-7}{3}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{4}$.

25. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1;6;5)$ и перпендикулярной двум прямым $\frac{x-5}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+6}{-5}$ и $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+6}{-2}$.

26. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(5;-1;6)$ и перпендикулярно плоскости $3x-4y+z-8=0$.

27. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(6;-3;2)$ параллельно прямой $\begin{cases}5x-y+2z-11=0,\\2x+y-3z+5=0.\end{cases}$

28. Найдите расстояние между параллельными прямыми:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{2} \text{ и } \frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

29. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{2}$ лежит в плоскости $4x+3y+7z-17=0$.

30. Через точки $A(-6;6;-5)$ и $B(12;-6;1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

Задача 6.

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-2;-4;9)$ и перпендикулярной плоскостям $3x-2y+z+6=0$ и $5x-4y+3z+13=0$.

2. Через точку $A(3;-1;2)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x-3y+5z-4=0$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;4;3)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+3}{1}$.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-1}{7}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{5}$, $\frac{x}{7}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{5}$.

5. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;4)$ и $B(3;2;1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+z-3=0$.

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-5;2;3)$ и параллельной прямым $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+5}{4}$.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(5;-1;3)$ и перпендикулярной плоскостям $3x+5y-z+2=0$ и $7x+y+2z-6=0$.

8. При каких значениях m и n радиус-вектор точки $A(m;2;n)$ может служить нормалью к плоскости $x-4y+2z+7=0$?

9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-8;6;-1)$ и параллельной прямой $\begin{cases}2x+y-3z+5=0,\\ x-2y+2z-2=0.\end{cases}$

10. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-5;4;1)$ перпендикулярно оси Ox.

11. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;-2;5)$ и $B(2;1;4)$ перпендикулярно плоскости $2x+y-z+7=0$.

12. При каком значении C плоскости $2x-y+3z-6=0$ и $3x-2y-Cy+5=0$ перпендикулярны?

13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;-2;5)$ и параллельной прямым $\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ и $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z-5}{-2}$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-4;3;-2)$ и параллельной плоскости xOy.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-5;4;2)$ и перпендикулярной плоскостям $8x-y+z-4=0$ и $3x+2y-z+7=0$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{-1}$ и $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-4}{-1}$.

17. Через точку $M(-5;1;2)$ повести плоскость, параллельную плоскости $2x+4y-7z-6=0$.

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ и $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$.

19. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;-2;4)$ и $B(1;0;-1)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+z-4=0$.

20. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1;2;4)$ и параллельной прямым $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z+1}{1}$ и $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-2}{7}$.

21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-3;4)$ и перпендикулярной плоскостям $4x-5y+z-9=0$ и $2x+y-2z-11=0$.

22. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-3;2;5)$ перпендикулярно оси Oy.

23. Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-1}$ и $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-1}$.

24. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;2;3)$ параллельно прямым $\frac{x-5}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{-1}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-1}{4}$.

25. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3;0;1)$ и $B(1;2;2)$ перпендикулярно плоскости $x-4y+5=0$.

26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-7;6;1)$ параллельно плоскости xOz.

27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;0;-1)$ и перпендикулярной плоскостям $5x-y+3z-8=0$ и $x+2y-z5=0$.

28. Найти расстояние от точки $M(4;3;0)$ до плоскости, проходящей через точки $A(1;3;0)$, $B(4;-1;2)$, $C(3;0;1)$.

29. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x-y-2z-3=0$ и $4x-y-2z-5=0$.

30. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(3;4;0)$ и прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$.

Составители:
Бильданов Ринат Талгатович
Грунина Мария Викторовна
Бабин Владислав Николаевич

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие

Издание второе, стереотипное

Редактор Н.К. Крупина

Подписано к печати 25 декабря 2017 г. Формат 60 × 84 1/16.
Объем 5,3 уч.-изд.л. Тираж 100 экз. Заказ № 1934