

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

**ЭКОНОМЕТРИКА**

Методические указания по проведению практических занятий

Часть 2

Новосибирск 2015

УДК 330, 43 (07)

ББК 65в631, я 7

### **Кафедра автоматизированной обработки информации**

Составитель: *О.В. Агафонова, заведующая кафедрой АОИ, к.э.н.*

Рецензенты: *С.А. Шелковников, заведующий кафедрой Финансов и статистики, д.э.н., профессор*  
*С.В. Чирков, доцент кафедры АОИ, к.п.н.*

**Эконометрика:** методические указания по проведению практических занятий.  
Часть 2 / Новосиб. гос. аграр. ун-т; сост.: О.В. Агафонова – Новосибирск, 2015. – 31 с.

Методические указания предназначены для проведения практических занятий у студентов экономического факультета по дисциплине «Эконометрика» всех направлений подготовки очной, заочной и очно-заочной форм обучения.

Методические указания обсуждены и одобрены на заседании кафедры автоматизированной обработки информации (протокол № 2 от «5» октября 2015 г.).

Методические указания утверждены и рекомендованы к изданию методической комиссией экономического факультета (протокол № 7 от «8» октября 2015 г.).

© Новосибирский государственный  
аграрный университет, 2015

## Содержание

Введение .....	4
1. Линейная регрессионная модель с двумя переменными .....	6
1.1 Методические указания по решению задачи .....	6
1.2 Задачи для самостоятельной работы .....	12
2. Нелинейная регрессионная зависимость между двумя переменными .....	17
2.1 Методические указания по решению задачи .....	17
2.2 Задачи для самостоятельной работы .....	20
3. Множественная регрессия и корреляция .....	24
3.1 Методические указания по решению задачи .....	24
3.2 Задачи для самостоятельной работы .....	26
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	28
ПРИЛОЖЕНИЕ .....	29

## Введение

Зарождение эконометрики является следствием междисциплинарного подхода к изучению экономики. Эта наука возникла в результате взаимодействия и объединения в особый «сплав» трех компонент: экономической теории, статистики и математических методов.

Результаты эконометрических исследований используются в анализе и планировании производства.

Целью изучения дисциплины Эконометрика являются теоретические знания и практические навыки в области построения и проверки адекватности регрессионных моделей финансово-экономических объектов.

Рассмотрение вопросов этой дисциплины предполагает приобретение студентами опыта построения эконометрических моделей, принятия решений о спецификации и идентификации модели, выбора метода оценки параметров модели, интерпретации результатов, получения прогнозных оценок.

Исходя из цели, в процессе изучения дисциплины основная задача курса – это знание основных методов эконометрики и умение применять их на практике, понимание места эконометрики в ряду прочих методов экономических исследований.

В результате изучения данного курса студент должен:

- иметь представление о предмете и методах эконометрики;
- знать основные способы построения эконометрических моделей и оценки их параметров;
- понимать значение эконометрического моделирования;
- уметь анализировать реальные данные и на их основе проверять теоретические гипотезы.

Дисциплина Эконометрика в соответствии с требованиями ФГОС ВПО направлена на формирование у студентов следующих компетенций:

- осознание сущности и значения информации в развитии современного общества; владение основными методами и средствами получения, хранения, переработки информации; навыками работы с компьютером как средством управления информацией;
- способность применять основные законы социальных, гуманитарных, экономических и естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, а также методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования; владение математическим аппаратом при решении профессиональных проблем.

Эконометрика входит в число базовых дисциплин экономического образования современного специалиста сельского хозяйства, изучение которой предполагает получение студентами опыта построения эконометрических моделей, выбора метода оценки параметров модели, получения прогнозных оценок, автокорреляции и др.

Порядок изучения дисциплины следующий. При самостоятельном изучении дисциплины вначале нужно ознакомиться с ее программой. Руководствуясь программой и настоящими методическими указаниями, необходимо приступить к последовательному и глубокому усвоению материала, изложенного в рекомендуемой литературе. При этом следует составить краткий конспект по основным положениям.

Завершающей стадией изучения дисциплины Эконометрика является контрольная работа. В процессе выполнения контрольной работы студенты углубляют знания, полученные при изучении теоретического материала, и используют их для решения конкретной задачи.

Данные методические указания позволяют студенту:

- систематизировать, закрепить и расширить теоретические знания и практические навыки по изучаемой дисциплине;
- развить способности самостоятельной работы;
- применить полученные знания для решения профессиональных задач.

# 1. Линейная регрессионная модель с двумя переменными

## 1.1 Методические указания по решению задачи

Имеются данные по 10 хозяйствам за 2014 год (табл. 1).

Таблица 1

№	Урожайность, ц/га ( $y$ )	Внесено удобрений, кг/га ( $x$ )
1	15	2,1
2	18	3,6
3	17	3,5
4	22	5,0
5	25	6,5
6	20	4,2
7	24	6,3
8	19	4,0
9	23	6,0
10	27	7,5

Требуется:

1. Построить поле корреляции и сформулировать гипотезу о форме связи.
2. Рассчитать параметры уравнения парной линейной регрессии зависимости урожайности от количества внесенных удобрений.
3. Оценить тесноту связи с помощью линейного коэффициента корреляции и коэффициента детерминации.
4. Оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации.
5. Определить с помощью среднего коэффициента эластичности силу влияния фактора на результат.
6. С вероятностью 0,95 оценить статистическую значимость уравнения регрессии в целом с помощью F-критерия Фишера. Построить таблицу дисперсионного анализа результатов регрессии.
7. Оценить значимость коэффициента корреляции через  $t$ -критерий Стьюдента при  $\alpha = 0,05$ .
8. Дать точечный прогноз и построить доверительный интервал для урожайности с вероятностью 0,95 в предположении, что размер внесенных удобрений увеличится на 500 г от среднего уровня.

Решение:

1. Построить поле корреляции и сформулировать гипотезу о форме связи.



Гипотеза:  $b > 0$ , связь прямая. При увеличении внесения удобрений урожайность повысится.

2. Рассчитать параметры уравнения парной линейной регрессии зависимости урожайности от количества внесенных удобрений.

Для расчетов параметров уравнения линейной регрессии необходимо построить вспомогательную таблицу (табл. 2):

Таблица 2

№	x	y	x y	x <sup>2</sup>	y <sup>2</sup>	$Y_{xi}=9,96$ $2+2,266x$	$Y_i-y_{xi}$	$\left  \frac{y_i - x_i}{y_i} \right $	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2,1	15	31,5	4,41	225	14,73	0,27	0,02	7,67
2	3,6	18	64,8	12,96	324	18,12	-0,12	0,01	1,61
3	3,5	17	59,5	12,25	289	17,9	-0,9	0,05	1,88
4	5,0	22	110	25	484	21,3	0,7	0,03	0,02
5	6,5	25	162,5	42,25	625	24,69	0,31	0,01	2,66
6	4,2	20	84	17,64	400	19,48	0,52	0,03	0,45
7	6,3	24	151,2	39,69	576	24,24	-0,24	0,01	2,04
8	4,0	19	76	16	361	19,03	-0,03	0,002	0,76
9	6,0	23	138	36	529	23,56	-0,56	0,02	1,28
10	7,5	27	202,5	56,25	729	26,95	0,05	0,002	6,92
Сумма	48,7	210	1080	262,18	4542	210,48	0	0,184	25,29
Ср.знач.	4,87	21	108	26,218	454,2	21,048	0	0,018	2,539

Зависимость урожайности от количества внесенных удобрений можно представить в виде линейной функции:

$$y = a + b \cdot x$$

Параметры  $a$  и  $b$  линейной регрессии рассчитываются по формулам:

$$b = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n} \quad \bar{y} = 21\bar{x} = 4,87 \quad \overline{x^2} = \frac{\sum x^2}{n} = \frac{262,45}{10} = 26,25$$

$$\bar{x}^2 = \bar{x} \cdot \bar{x} = 4,87 \cdot 4,87 = 23,7169$$

$$b = \frac{108 - (21 \cdot 4,87)}{26,245 - 23,7169} = \frac{5,73}{2,5281} = 2,2665$$

$$a = 21 - (2,2665 \cdot 4,87) = 21 - 11,0389 = 9,962$$

Линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$y = 9,962 + 2,2665x$$

Коэффициент регрессии показывает среднее изменение результативного показателя (в единицах измерения  $y$ ) с повышением или понижением величины фактора  $x$  на единицу его измерения. Коэффициент регрессии  $b = 2,2665$  свидетельствует, что при увеличении внесения удобрений на 1 кг/га урожайность повысится в среднем на 2,2665 ц/га.

Связь между внесёнными удобрениями и урожайностью, определяет знак коэффициента регрессии  $b$  (если  $> 0$  – прямая связь, иначе – обратная). В нашем примере связь прямая.

Подставив в уравнение регрессии  $y = 9,962 + 2,2665x$  соответствующие значения  $x$ , можно определить выровненные (предсказанные) значения результативного показателя  $y(x)$  для каждого наблюдения.

3. Оценить тесноту связи с помощью линейного коэффициента корреляции и коэффициента детерминации.

Для парной линейной зависимости коэффициент корреляции определяется по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{y} \cdot \bar{x}}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

где  $\overline{xy} = \frac{\sum xy}{n}$  – средняя из произведения признаков;



$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2}$  – среднеквадратические отклонения по  $x, y$ .

Данные по расчёту коэффициента корреляции представлены ниже:

$$\overline{xy} = 108 \text{ (табл. 2)}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{262,45}{10} - 23,7169} = 1,59$$

$$\sigma_y = \sqrt{454,2 - 441} = 3,63$$

$$r_{xy} = \frac{108 - 4,87 \cdot 21}{1,59 \cdot 3,67} = 0,99$$

Коэффициент корреляции  $r_{xy} = 0,99$  свидетельствует, что связь между признаками тесная (полная), так как коэффициент находится в границах:

$$0,9 < r_{xy} \leq 1$$

Коэффициент детерминации:

$$r_{xy}^2 = 0,99^2 = 0,98$$

Это показывает, что вариация  $y$  на 98 % объясняется вариацией  $x$ . На долю прочих факторов, не учитываемых в регрессии, приходится всего 2%. 98 % увеличения или снижения урожайности объясняется количеством внесённых удобрений.

4. Оценить качество уравнения с помощью средней ошибки аппроксимации.

Для расчётов необходимо подставить в уравнение регрессии соответствующие значения  $x$  (данные представлены в таблице 2).

$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100\%$$

$$\bar{A} = \left( \frac{0,184}{10} \right) \cdot 100\% = 1,84\%$$

Средняя ошибка аппроксимации показывает, на сколько процентов фактические значения отклоняются от теоретических. В данном случае всего на 1,84 % (хорошее соответствие расчетных и фактических данных), что не превышает допустимого предела в 10 %, поэтому качество модели считается хорошим.

5. Определить с помощью среднего коэффициента эластичности силу влияния фактора на результат.

Формула для расчета среднего коэффициента эластичности:

$$\varepsilon = b \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$$

$$\varepsilon = 2,266 \cdot \frac{4,87}{21} = 0,53$$

Средний коэффициент эластичности равный 0,53 свидетельствует, что при увеличении внесения удобрений на 1 % от своего среднего значения, урожайность повысится на 0,53 % от своего среднего значения.

6. С вероятностью 0,95 оценить статистическую значимость уравнения регрессии в целом с помощью F-критерия Фишера. Построить таблицу дисперсионного анализа результатов регрессии.

F-критерий Фишера будет равен:

$$F_{\Phi} = \frac{D_{\text{об}}}{D_{\text{ост}}} = \frac{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{1}}{\frac{\sum(y_i - y_{x_i})^2}{n - 2}} = \frac{129,8}{0,275} = 472$$

Табличное значение F-критерий Фишера при  $\nu_1 = 1$ ,  $\nu_2 = 8$ ,  $\alpha = 0,05$  составит:

$$F_{\alpha; \nu_1; \nu_2} = F_{0,05; 1; 8} = 5,32$$

$F_{\Phi} > F_{\alpha; \nu_1; \nu_2}$ , гипотеза ( $b = 0$ ) отклоняется, следовательно влияние фактора существенно, модель достоверна, статистически значима, надёжна, сформировалась под неслучайным воздействием фактора  $x$ .

Таблица 3

Дисперсионный анализ

Источник вариации	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Дисперсия	Отношение дисперсии
Общая	$n-1$	$\sum (y_i - \bar{y})^2$	$D_{\text{общ}} = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n - 1}$	$F_{\Phi} = \frac{D_{\text{об}}}{D_{\text{ост}}} \geq 1$  $F_{\alpha; \nu_1; \nu_2}$
Объяснённая	1	$\sum (y_{x_i} - \bar{y})^2$	$D_{\text{об}} = \frac{\sum (y_{x_i} - \bar{y})^2}{1}$	
Остаточная	$n-2$	$\sum (y_i - y_{x_i})^2$	$D_{\text{ост}} = \frac{\sum (y_i - y_{x_i})^2}{n - 2}$	

Таблица 4

Источник вариации	Число степеней свободы	Сумма квадратов отклонений	Дисперсия	Отношение дисперсии
Общая	9	132	---	$F_{\Phi} = \frac{129,8}{0,275} = 472$ $F_{0,05; 1; 8}$
Объяснённая	1	129,8	129,8	
Остаточная	8	2,2	0,275	

7. Оценить значимость коэффициента корреляции через t-критерий Стьюдента при  $\alpha = 0,05$ .

$$t_{\text{факт}} = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \cdot \sqrt{n-2}$$

$$t_{\text{факт}} = \frac{0,99}{\sqrt{1-0,98}} \cdot \sqrt{10-2} = 20,01$$

Для определения  $t_{\text{табл}}$  необходимо рассчитать число степеней свободы  $\nu = n - 2$ ,  $\nu = 8$ ,  $\alpha = 0,05$  (по условию задачи). Таким образом,  $t_{\text{табл}} = 2,3060$ .

$t_{\text{факт}} > t_{\text{табл}}$  (необходимо сравнивать по абсолютной величине).

Фактическое значение больше табличного, что свидетельствует о значимости линейного коэффициента корреляции и существенной связи между количеством внесенных удобрений и урожайностью культуры.

8. Дать точечный прогноз и построить доверительный интервал для урожайности с вероятностью 0,95 в предположении, что размер внесенных удобрений увеличится на 500 г от среднего уровня.

Прогнозное значение:

$$y_{x_p} = a + b \cdot x_p$$

$$x_p = \bar{x} + \Delta x = 4,87 + 0,5 = 5,37$$

$$y_{x_p} = 9,962 + 2,2665 \cdot 5,37 = 22,13$$

Интервальный прогноз:

$$y_{x_p} - \varepsilon_{y_{x_p}} < y_p^* < y_{x_p} + \varepsilon_{y_{x_p}} \text{ – доверительный интервал прогноза.}$$

$$y_{x_p} - \varepsilon_{y_{x_p}} < y_p^* < y_{x_p} + \varepsilon_{y_{x_p}}$$

$$\varepsilon_{x_p} = m_{y_{x_p}} \cdot t_{\alpha; \nu}$$

$$t_{\alpha; \nu} = t_{0,05; 8} = 2,3060$$

$$\varepsilon_{x_p} = m_{y_{x_p}} \cdot t_{\alpha; \nu} = 0,289 \cdot 2,3060 = 0,666$$

$$m_{y_{xp}} = D_{\text{ост}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \bar{x})^2}{\sum (x - \bar{x})^2}} = 0,275 \sqrt{1 + \left(0,1 + \frac{0,5^2}{25,29}\right)}$$

Показатель  $(x_i - \bar{x})^2$  рассчитан в таблице 2.

$$y_{xp} + \varepsilon_{xp} = 22,13 + 0,666 = 22,796$$

$$y_{xp} - \varepsilon_{xp} = 22,13 - 0,666 = 21,464$$

Следовательно, прогнозное значение урожайности зерновых культур, зависимой от уровня внесённых удобрений, с вероятностью будет находиться в пределах от 21,464 до 22,796 и не примет нулевых значений. Это значит, что прогноз является статистически существенным.

## 1.2 Задачи для самостоятельной работы

### Задача 1.

Изучается зависимость между ценой квартиры (тыс. долл.),  $y$  и размером ее общей площади ( $\text{м}^2$ ),  $x$  по данным, представленным в табл. 5

Таблица 5

№	Цена квартиры, тыс. долл. ( $y$ )	Общая площадь квартиры, $\text{м}^2$ ( $x$ )
1	89	200
2	44	89
3	76	127
4	69	130
5	130	195
6	83	112
7	65	130
8	37	75
9	33	74
10	22	48

### Задание

1. Постройте поле корреляции, характеризующее зависимость цены квартиры от общей площади.
2. Определите параметры уравнения парной линейной регрессии. Дайте интерпретацию коэффициента регрессии и знака при свободном члене уравнения.
3. Рассчитайте линейный коэффициент детерминации и дайте его интерпретацию.
4. Найдите среднюю ошибку аппроксимации.
5. Рассчитайте стандартную ошибку регрессии.

6. С вероятностью 0,95 оцените статистическую значимость уравнения регрессии в целом, а также его параметров. Сделайте выводы.

7. С вероятностью 0,95 постройте доверительный интервал ожидаемого значения цены квартиры в предположении, что общая площадь квартиры увеличится на 3 % от своего среднего уровня. Сделайте выводы.

### Задача 2.

По 27 регионам страны изучается зависимость средней заработной платы,  $y$  от валового продукта (ВРП) на душу населения,  $x$  (табл. 6).

Таблица 6

Номер региона	ВРП на душу населения, тыс. руб. ( $x$ )	Средняя заработная плата, тыс. руб. ( $y$ )	Номер региона	ВРП на душу населения, тыс. руб. ( $x$ )	Средняя заработная плата, тыс. руб. ( $y$ )
1	35,8	3,5	15	32,5	3,3
2	22,5	2,6	16	32,4	3,3
3	28,3	3,2	17	50,9	3,9
4	26,0	2,6	18	44,8	4,7
5	20,0	2,6	19	79,1	6,5
6	31,8	3,5	20	47,4	5,0
7	30,5	3,1	21	53,3	4,5
8	29,5	2,9	22	33,1	3,7
9	41,5	3,4	23	48,4	4,5
10	41,3	4,8	24	61,1	7,2
11	34,5	3,0	25	38,9	3,4
12	34,9	3,1	26	26,2	2,9
13	34,7	3,3	27	59,3	5,4
14	26,8	2,6			

### Задание

1. Постройте поле корреляции и сформулируйте гипотезу о форме связи.
2. Рассчитайте параметры уравнений линейной парной регрессий.
3. Оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.
4. Используя средние (общие) коэффициенты эластичности, сравните оценки силы связи фактора с результатом.
5. Оцените качество уравнений с помощью средней ошибки аппроксимации.
6. С помощью F-критерия Фишера оцените статистическую надежность результатов регрессионного моделирования.
7. По выбранному уравнению регрессии рассчитайте прогнозное значение результата при условии, что прогнозное значение результата при

условии, что прогнозное значение фактора увеличивается на 4 % от его среднего уровня. Определите доверительный интервал прогноза для уровня значимости  $\alpha = 0,05$ .

8. Оцените полученные результаты, выводы оформите в аналитической записке.

### Задача 3.

По регионам страны изучается зависимость розничной продажи продукции,  $y$  от среднедушевых ежемесячных денежных доходов,  $x$  (табл. 7).

Таблица 7

Номер региона	Среднедушевой ежемесячный денежный доход, тыс. руб. ( $x$ )	Розничная продажа продукции, тыс. шт. ( $y$ )
1	2,4	4,8
2	3,0	5,7
3	2,2	5,1
4	2,1	5,5
5	4,0	6,2
6	2,5	4,9
7	5,0	7,0
8	2,3	4,7
9	3,0	4,9
10	3,4	5,5
11	3,9	5,6
12	2,3	4,4
13	3,1	5,8
14	2,6	4,5
15	5,7	7,1
16	5,2	6,5
17	3,0	5,1

### Задание

1. Постройте поле корреляции и сформулируйте гипотезу о форме связи.
2. Рассчитайте параметры уравнений линейной парной регрессий.
3. Оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.
4. Рассчитайте средний общий коэффициент эластичности.
5. Оцените качество уравнений с помощью средней ошибки аппроксимации.
6. С помощью F-критерия Фишера оцените статистическую надежность результатов регрессионного моделирования. Выберите лучшее уравнение регрессии и дайте его обоснование.

7. Рассчитайте ожидаемое значение результата по линейному уравнению регрессии, если прогнозное значение фактора увеличится на 6 % от его среднего уровня. Определите доверительный интервал прогноза для уровня значимости  $\alpha = 0,05$ .

#### Задача 4.

По 26 регионам страны изучается зависимость ожидаемой продолжительности жизни при рождении (лет),  $y$  от уровня заболеваемости детей в возрасте 0-14 лет на тыс. человек,  $x$  (табл. 8).

Таблица 8

Номер региона	Уровень заболеваемости детей в возрасте 0-14 лет на тыс. человек ( $x$ )	Ожидаемая продолжительность жизни при рождении лет ( $y$ )
1	1108,4	67,5
2	1164,4	69,3
3	438,8	75,1
4	618,1	68,7
5	1312,4	66,2
6	982,7	68,1
7	843,0	70,0
8	1233,6	67,3
9	1173,0	67,1
10	1415,5	65,4
11	1608,6	66,4
12	1703,9	66,5
13	1529,0	66,4
14	1516,3	64,0
15	1474,3	66,0
16	1390,5	67,8
17	2208,7	62,1
18	1312,8	66,1
19	1520,5	63,7
20	1809,5	64,0
21	1568,4	65,4
22	1654,2	65,7
23	1749,5	62,3
24	1746,0	65,6
25	1475,1	65,6
26	1753,4	65,3

#### Задание

1. Постройте поле корреляции и сформулируйте гипотезу о форме связи.

2. Рассчитайте параметры уравнений парной линейной регрессии.
3. Оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.
4. С помощью среднего (общего) коэффициента эластичности дайте сравнительную оценку силы связи фактора с результатом.
5. Оцените качество уравнений с помощью средней ошибки аппроксимации.

### **Задача 5.**

Имеются данные о цене однокомнатной квартиры и величине ее общей площади по 10 сделкам одного района города (табл. 9).

Таблица 9

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Цена квартиры, тыс. долл. ( $y$ )	29	31	35	35	45	46	45	44	38	37
Площадь	35	35	33	34	38	40	40	39	37	36

### **Задание**

1. Постройте поле корреляции и сформулируйте гипотезу о форме связи.
2. Рассчитайте параметры уравнений линейной парной регрессий.
3. Оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.
4. Дайте с помощью среднего (общего) коэффициента эластичности сравнительную оценку силы связи фактора с результатом.
5. Оцените качество уравнений с помощью средней ошибки аппроксимации.
6. Оцените с помощью F-критерия Фишера статистическую надежность результатов регрессионного моделирования.
7. Рассчитайте прогнозное значение результата, если прогнозное значение фактора увеличится на 10 % от его среднего уровня. Определите доверительный интервал прогноза для уровня значимости  $\alpha = 0,05$
8. Оцените полученные результаты, выводы оформите в аналитической записке.



## 2. Нелинейная регрессионная зависимость между двумя переменными

### 2.1 Методические указания по решению задачи

Изучается зависимость потребления материалов на единицу продукции от объема выпускаемой предприятием продукции.

Таблица 10

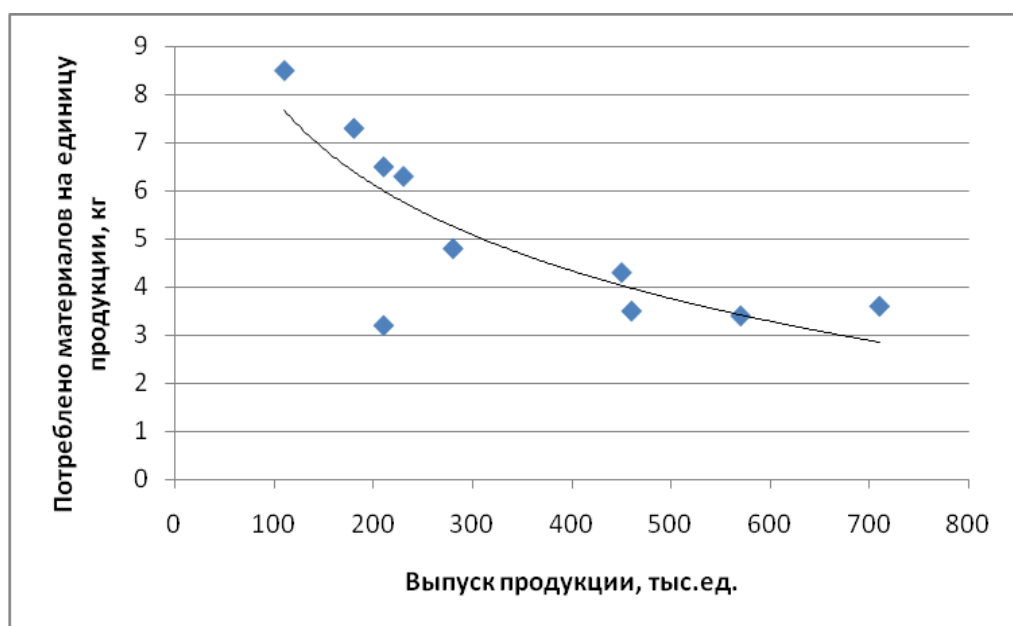
Показатель	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Потреблено материалов на единицу продукции, кг (y)	8,5	6,3	4,8	4,3	3,5	3,4	3,6	6,5	7,3	3,2
Выпуск продукции, тыс. ед. (x)	110	230	280	450	460	570	710	210	180	210

Требуется:

1. Построить поле корреляции.
2. Найти параметры уравнения  $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ .
3. Оценить тесноту связи с помощью индекса корреляции, детерминации.
4. Определить с помощью среднего коэффициента эластичности силу влияния фактора на результат.
5. Рассчитать среднюю ошибку аппроксимации.
6. Сделать вывод о значимости уравнения регрессии.

Решение:

1. Построить поле корреляции.



2. Найти параметры уравнения  $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$ .

Для расчетов параметров уравнения регрессии необходимо построить вспомогательную таблицу (табл. 11).

Таблица 11

№	$X = \frac{1}{x}$	$y_i$	$X^2$	$y^2$	$X \cdot y$	$y_{xi}$	$(y_i - y_{cp})^2$	$(y_i - y_x)^2$	ABC $\left( \frac{(y_i - y_x)}{y_i} \right) \cdot 100$
1	0,00909	8,5	8,264E-05	72,25	0,0772	9,1374	11,2896	0,4063	7,4994
2	0,00434	6,3	1,89E-05	39,69	0,0273	5,4422	1,3456	0,7357	13,614
3	0,00357	4,8	1,27E-05	23,04	0,0171	4,8373	0,1156	0,0013	0,7790
4	0,00222	4,3	4,93E-06	18,49	0,0095	3,7862	0,7056	0,2639	11,947
5	0,00217	3,5	4,72E-06	12,25	0,0076	3,748	2,6896	0,0618	7,1037
6	0,00175	3,4	3,07E-06	11,56	0,0059	3,4217	3,0276	0,0004	0,6408
7	0,00140	3,6	1,98E-06	12,96	0,0050	3,1522	2,3716	0,2004	12,436
8	0,00476	6,5	2,26E-05	42,25	0,0309	5,7648	1,8496	0,5404	11,309
9	0,00555	7,3	3,08E-05	53,29	0,0405	6,3831	4,6656	0,8405	12,559
10	0,00476	3,2	2,26E-05	10,24	0,015238	5,7648	3,7636	6,5784	80,151
Сумма	0,03964	51,4	0,0002	296,02	0,2367	51,438	31,824	9,6296	158,04
Ср.знач.	0,003965	5,14	0,00002	29,602	0,0236	5,1438	3,1824	0,9629	15,804

Воспользуемся методом наименьших квадратов. Характеристики оценок, получаемых по данному методу, следуют из теоремы Гаусса-Маркова. Задача состоит в том, чтобы получить такие оценки коэффициентов уравнения регрессии, чтобы:

$$\sum (y_i - y_{xi})^2 \rightarrow \min$$

$$Y_{xi} = a + \frac{b}{x}, \quad X = \frac{1}{x}, \quad \text{тогда } Y_{xi} = a + b \cdot X,$$

следовательно

$$S = \sum (y_i - a - b \cdot X)^2 \rightarrow \min$$

Система нормальных уравнений в данном случае:

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum X = \sum y \\ a \cdot \sum X + b \cdot \sum X^2 = \sum yX \end{cases}$$

Для наших данных система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} 10a + 0,0396b = 51,4 \\ 0,0396a + 0,0002b = 0,237 \end{cases}$$

Из первого уравнения необходимо выразить  $a$  и подставить во второе уравнение. Получатся эмпирические коэффициенты регрессии:  $b = 779,07$ ,  $a = 2,055$

Уравнение регрессии:

$$y = \frac{779,07}{x} + 2,055$$

Данные коэффициенты являются лишь оценками теоретических коэффициентов, а само уравнение отражает лишь общую тенденцию в поведении рассматриваемых переменных.

3. Оценить тесноту связи с помощью индекса корреляции, детерминации.

Для определения тесноты связи между исследуемыми признаками рассчитаем индекс корреляции. Величина индекса корреляции находится в пределах:  $0 < R < 1$ . Формула для расчета:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum(y_i - y_x)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}}$$

$$R = 0,84$$

Индекс корреляции равный 0,84 свидетельствует о том, что фактор  $x$  существенно влияет на  $y$ , т.е. прослеживается значительное влияние количества внесенных удобрений на урожайность.

Также необходимо рассчитать индекс детерминации (чаще всего, его выражают в процентах).

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - y_x)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$

$R^2 = 0,71$ , т.е. в 71 % вариации  $y$  объясняется вариацией  $x$ , остальные 29 % изменений,  $y$  объясняются факторами, не учтенными в модели.

4. Определить с помощью среднего коэффициента эластичности силу влияния фактора на результат.

Коэффициент регрессии нежелательно использовать для непосредственной оценки влияния факторов на результативный признак (при существовании различия единиц измерения результативного показателя  $y$  и фактора  $x$ ). Для этих целей вычисляется коэффициент эластичности.

Средний коэффициент эластичности  $\mathcal{E}$  показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат  $y$  от своей средней величины при изменении фактора  $x$  на 1 % от своего среднего значения.

Коэффициент эластичности:

$$\varepsilon_{cp} = 0,64$$

Коэффициент эластичности равен 0,64. Коэффициент эластичности показывает, что в среднем при росте выпуска продукции на 1 % потребление материалов на единицу продукции повысится на 0,64 %.

#### 5. Рассчитать среднюю ошибку аппроксимации.

Средняя ошибка аппроксимации находится как средняя арифметическая простая из индивидуальных ошибок.

Ошибка аппроксимации, равная 15,8 (табл. 11) не значительно выходит за пределы допустимых значений (<15), что может быть связано с ошибками округления (при решении с помощью компьютера данные неточности сводятся к минимуму).

В данном случае можно сказать, что среднее отклонение расчетных и фактических данных составляет 15,8 %.

#### 6. Сделать вывод о значимости уравнения регрессии.

F-критерий Фишера составит:

$$F = 19,59$$

Эта величина превышает табличное значение более чем на 5 % ( $F_{табл} = 6,61$ ). Следовательно, найденное уравнение регрессии

$$y = \frac{779,07}{x} + 2,055 \text{ статистически значимо.}$$

## 2.2 Задачи для самостоятельной работы

### Задача 1.

По 18 регионам страны изучается зависимость инвестиций основной капитал, у от валового регионального продукта (ВРП) x (табл. 12).

Таблица 12

Номер региона	ВРП млрд. руб. (x)	Инвестиции в основной капитал млрд. руб. (y)	Номер региона	ВРП млрд. руб. (x)	Инвестиции в основной капитал млрд. руб. (y)
<b>1</b>	24,6	5,0	<b>10</b>	41,3	8,0
<b>2</b>	41,1	9,0	<b>11</b>	47,0	10,8
<b>3</b>	29,5	4,8	<b>12</b>	54,7	9,9
<b>4</b>	27,6	5,4	<b>13</b>	53,3	10,0
<b>5</b>	31,9	7,4	<b>14</b>	46,7	10,0
<b>6</b>	38,8	6,6	<b>15</b>	71,1	13,2
<b>7</b>	39,2	7,8	<b>16</b>	58,8	10,0
<b>8</b>	40,2	9,3	<b>17</b>	67,9	13,9
<b>9</b>	41,6	9,6	<b>18</b>	65,7	12,0

### **Задание**

1. Постройте поле корреляции и сформулируйте гипотезу о форме связи.
2. Рассчитайте параметры уравнений степенной, экспоненциальной, полулогарифмической, обратной, гиперболической парной регрессий.
3. Оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.
4. С помощью среднего (общего) коэффициента эластичности дайте сравнительную оценку силы связи фактора с результатом.
5. Оцените качество уравнений с помощью средней ошибки аппроксимации.
6. С помощью F-критерия Фишера определите статистическую надежность результатов регрессионного моделирования.
7. Рассчитайте прогнозное значение результата по выборному уравнению регрессии, если прогнозное значение фактора увеличится на 7 % от среднего уровня. Определите доверительный интервал прогноза для уровня значимости  $\alpha = 0,05$ .
8. Оцените полученные результаты, выводы оформите в аналитической записке.

### **Задача 2.**

По 17 регионам страны изучается зависимость ежемесячного среднедушевого денежного дохода,  $y$  от удельного веса населения в трудоспособном возрасте в общей численности населения,  $x$  (табл. 13).

Таблица 13

Номер региона	Удельный вес населения в трудоспособном возрасте в общей численности населения, % ( $x$ )	Среднедушевой ежемесячный денежный доход тыс. руб. ( $y$ )
1	60,6	3,4
2	59,6	3,1
3	60,8	3,7
4	59,4	3,4
5	60,4	3,6
6	60,8	3,3
7	60,6	3,1
8	59,3	3,3
9	60,3	3,6
10	62,3	4,7
11	60,2	3,2
12	59,0	3,3
13	61,4	4,1
14	58,9	3,4
15	59,0	3,2
16	59,2	3,4
17	61,0	3,9

### **Задание**

1. Постройте поле корреляции и сформулируйте гипотезу о форме связи.
2. Рассчитайте параметры уравнений линейной, степенной, экспоненциальной, полулогарифмической, обратной, гиперболической парной регрессий.
3. Оцените тесноту связи с помощью показателей корреляции и детерминации.
4. С помощью среднего (общего) коэффициента эластичности дайте сравнительную оценку силы связи фактора с результатом.
5. Качество моделей оцените с помощью средней ошибки аппроксимации.
6. С помощью F-критерия Фишера определите статистическую надежность результатов регрессионного моделирования. По значениям характеристик, рассчитанных в пп. 2-5, выберите лучшее уравнение регрессии и дайте его обоснование.
7. Рассчитайте прогнозное значение результата по линейному уравнению регрессии, если прогнозируется увеличение значения фактора на 10 % от его среднего уровня. Определите доверительный интервал прогноза для уровня значимости  $\alpha = 0,05$ .
8. Оцените полученные результаты, выводы оформите в аналитической записке.

### **Задача 3.**

По 19 регионам страны изучается зависимость среднемесячной заработной платы,  $y$  от инвестиций в основной капитал на душу населения,  $x$  (табл. 14).

Таблица 14

Номер региона	Инвестиции в основной капитал на душу населения, тыс. руб. ( $x$ )	Среднемесячная заработная плата, тыс. руб. ( $y$ )
1	4,9	3,9
2	8,5	5,5
3	9,1	4,8
4	5,5	4,0
5	6,1	3,9
6	5,1	3,8
7	4,2	4,1
8	3,8	3,0
9	11,0	6,3
10	6,9	4,8
11	7,5	5,2
12	5,5	3,7
13	5,8	3,5
15	4,9	4,2

16	6,0	4,5
17	10,4	6,6
19	8,8	6,7

### ***Задание***

1. Постройте поле корреляции и сформулируйте гипотезу о форме связи.
2. Рассчитайте параметры уравнений линейной, степенной, экспоненциальной, полулогарифмической, обратной, гиперболической парной регрессий.
3. С помощью показателей корреляции и детерминации оцените тесноту связи.
4. Используя средний (общий) коэффициент эластичности, сравните оценки силы связи фактора с результатом.
5. Оцените качество уравнений с помощью средней ошибки аппроксимации.
6. С помощью F-критерия Фишера оцените статистическую надежность результатов регрессионного моделирования. По значениям характеристик, рассчитанных в пп. 2-5, обоснуйте выбор лучшего уравнения регрессии.
7. Рассчитайте ожидаемое значение среднемесячной заработной платы по линейному уравнению регрессии, если величина инвестиций в расчете на одного человека увеличится на 5 % от среднего уровня. Определите доверительный интервал прогноза для уровня значимости  $\alpha = 0,05$ .
8. Оцените полученные результаты, выводы оформите в аналитической записке.

### 3. Множественная регрессия и корреляция

#### 3.1 Методические указания по решению задачи

По 38 сельскохозяйственным предприятиям имеются данные о средних значениях и вариации урожайности картофеля, количестве внесенных органических удобрений и доли посадок картофеля после лучших предшественников, а также о значениях коэффициентов парной корреляции между этими признаками (табл. 15).

Таблица 15

Показатель	Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение ( $\sigma$ )	Линейные коэффициенты парной корреляции
Урожайность картофеля с 1 га, ц	$y$	178,7	27,852	---
Внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т	$x_1$	32,8	3,268	$r_{yx_1} = 0,402$
Доля посадок картофеля по лучшим предшественникам, %	$x_2$	85,3	15,736	$r_{yx_2} = 0,586$ $r_{x_1x_2} = 0,052$

Требуется:

1. Построить уравнение множественной линейной регрессии зависимости урожайности картофеля от количества внесенных органических удобрений и доле посадок картофеля по лучшим предшественникам в стандартизованном масштабе и в естественной форме.

2. Определить линейный коэффициент множественной корреляции.

3. Рассчитать общий F-критерий Фишера при уровне значимости  $\alpha = 0,05$ .

Решение:

1. Уравнение множественной линейной регрессии имеет вид:

$$\hat{y}_{x_1x_2} = a + b_1x_1 + b_2x_2,$$

где  $\hat{y}_{x_1x_2}$  – урожайность картофеля с 1 га, ц;

$x_1$  – внесено органических удобрений на 1 га посадки картофеля, т;

$x_2$  – доля посадок картофеля по лучшим предшественникам, %;

$a, b_1, b_2$  – параметры уравнения.

Для расчета параметров  $a, b_1$  и  $b_2$  необходимо построить уравнение множественной регрессии в стандартизованном масштабе:

$$t_v = \beta_1t_{x_1} + \beta_2t_{x_2},$$



где  $t_y, t_{x_1}, t_{x_2}$  – стандартизованные переменные;

$\beta_1, \beta_2$  – стандартизованные коэффициенты регрессии.

Стандартизованные коэффициенты регрессии:

$$\beta_1 = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2} = \frac{0,402 - 0,586 \cdot 0,052}{1 - 0,052^2} = 0,373$$
$$\beta_2 = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} r_{x_1 x_2}}{1 - r_{x_1 x_2}^2} = \frac{0,586 - 0,402 \cdot 0,052}{1 - 0,052^2} = 0,567$$

где  $r_{yx_1}, r_{yx_2}, r_{x_1 x_2}$  – парные коэффициенты корреляции.

Уравнение множественной регрессии в стандартизованной форме:

$$t_y = 0,373 \cdot t_{x_1} + 0,567 \cdot t_{x_2}$$

Стандартизованные коэффициенты регрессии позволяют сделать заключение о сравнительной силе влияния каждого фактора на урожайность картофеля. Наиболее значительно влияние доли посадок картофеля по лучшим предшественникам. Количество внесенных органических удобрений оказывает меньшее воздействие.

Для построения уравнения в естественной форме рассчитываются  $b_1$  и  $b_2$  – переход от  $\beta_i$  к  $b_i$ :

$$b_i = \beta_i \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_i}}$$

где  $\sigma_y, \sigma_{x_i}$  – средние квадратические отклонения.

$$b_1 = \beta_1 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_1}} = 0,373 \cdot \frac{27,852}{3,268} = 3,179$$
$$b_2 = \beta_2 \frac{\sigma_y}{\sigma_{x_2}} = 0,567 \cdot \frac{27,852}{15,736} = 1,003$$

Параметр  $a$ :

$$a = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 = 178,7 - 3,179 \cdot 32,8 - 1,003 \cdot 85,3 = -11,17$$

$$\hat{y}_{x_1 x_2} = -11,17 + 3,179 x_1 + 1,003 x_2,$$

Каждый из коэффициентов уравнения регрессии определяет среднее изменение урожайности за счет изменения соответствующего фактора при фиксированном уровне другого. Так, коэффициент при  $x_1$  показывает, что увеличение количества внесения органических удобрений на 1 т ведет к повышению урожайности картофеля на 3,179 ц. Соответственно коэффициент при  $x_2$  определяет меру зависимости урожайности картофеля от доли высадки его по лучшим предшественникам.

2. Для определения линейного коэффициента множественной корреляции необходимо использовать формулу:

$$R_{yx_1x_2} = \sqrt{r_{yx_1}\beta_1 + r_{yx_2}\beta_2} = \sqrt{0,402 \cdot 0,373 + 0,586 \cdot 0,567} = 0,694$$

Коэффициент множественной корреляции показывает довольно тесную зависимость между результативным признаком и рассматриваемыми факторами. Коэффициент множественной детерминации

$$R_{yx_1x_2}^2 = 0,694^2 = 0,482$$

свидетельствует, что 48,16 % изменений урожайности картофеля связано с анализируемыми признаками.

3. Статистическая значимость уравнения регрессии в целом оценивается с помощью общего F-критерия Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R_{yx_1x_2}^2}{1 - R_{yx_1x_2}^2} : \frac{m}{n - m - 1},$$

где  $n$  – число единиц совокупности;

$m$  – число факторов в уравнении линейной регрессии.

$$F_{\text{факт}} = \frac{0,482}{1 - 0,482} : \frac{2}{38 - 2 - 1} = 16,33$$

$$F_{\text{табл}} = 3,26; \text{ при } \alpha = 0,05; k_1 = m = 2 \text{ и } k_2 = n - m - 1 = 38 - 2 - 1 = 35$$

Фактическое значение критерия больше табличного, что свидетельствует о статистической значимости уравнения регрессии в целом

### 3.2 Задачи для самостоятельной работы

#### Задача 1.

Имеются данные по 30 территориям России (табл. 16).

Таблица 16

Признак	Среднее значение	Среднее квадратическое отклонение	Линейный коэффициент парной корреляции
Среднедневной душевой доход, руб. ( $y$ )	433,5	61,44	-
Среднедневная заработная плата одного работающего, руб. ( $x_1$ )	254,9	25,86	$r_{yx_1} = 0,8405$
Средний возраст безработного, лет ( $x_2$ )	33,5	0,58	$r_{yx_2} = -0,2101$ $r_{x_1x_2} = -0,1160$

### Задание

1. Построить уравнение множественной регрессии в стандартизированной и естественной форме.
2. Рассчитать линейные коэффициенты частной корреляции и коэффициент множественной корреляции, сравнить их с линейными коэффициентами парной корреляции, пояснить различия между ними
3. Рассчитать общий и частные F-критерии Фишера.

### Задача 2.

При изучении зависимости потребления материалов (т),  $y$  от энерговооруженности труда (кВт/ч на одного рабочего)  $x_1$  и объема произведенной продукции (тыс. ед.)  $x_2$  по 25 предприятиям получены следующие данные (табл. 17)

Таблица 17

Признак	Среднее значение	Среднеквадратическое отклонение	Парный коэффициент корреляции
$y$	12,0	2,0	$r_{yx_1}=0,52$
$x_1$	4,3	0,5	0,84
$x_2$	10,0	1,8	$r_{x_1x_2}=0,43$

### Задание

1. Постройте уравнение в стандартизованном и в натуральном масштабе.
2. Определите частные коэффициенты эластичности и стандартизованные коэффициенты регрессии.
3. Найдите частные и множественные коэффициенты корреляции.
4. 4.Оцените значимость уравнение регрессии с помощью F-критерия Фишера.
5. Оцените значимость коэффициентов множественной регрессии.
6. С вероятностью 0,95 дайте интервальную оценку коэффициентов регрессии.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Новиков А.И. Эконометрика [Электронный ресурс]: Учебное пособие / А.И. Новиков. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2013. – 224 с. (ЭБС)
2. Полянский Ю.Н. Эконометрика. Эконометрическое моделирование и прогнозирование: учебное пособие. – М.: Академия экономической безопасности МВД России, 2008. – 190с.
3. Практикум по эконометрике: учеб.пособие; под ред И.И. Елисеевой. 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2008. – 344 с.
4. Эконометрика: теоретические основы: Учебное пособие / Г.А. Соколов. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 216 с. (ЭБС)
5. Эконометрика: учебник; под ред. И.И. Елисеевой, 2-е изд.перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 576 с.
6. Эконометрика - 2: продвинутый курс с приложениями в финансах: Учеб. / С.А. Айвазян, Д. Фантаццини; Московская школа экономики МГУ им. М.В. Ломоносова (МШЭ) – М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 944 с. (ЭБС)

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### 1. Таблица значений F-критерия Фишера для уровня значимости $\alpha = 0,05$

$k_2 \backslash k_1$	1	2	3	4	5	6	8	12	24	$\infty$
1	161,5	199,5	215,7	224,6	230,2	233,9	238,9	243,9	249,0	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,00	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,83	1,57
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,76	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,74	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,67	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,65	1,31

90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,64	1,28
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,63	1,26
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,60	1,21
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,59	1,18
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,57	1,14
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,55	1,10
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,54	1,07
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,54	1,06
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,53	1,03
$\infty$	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00

## 2. Критические значения t-критерия Стьюдента для уровней значимости 0,10, 0,05, 0,01 (двухсторонний)

Число степеней свободы d.f.	$\alpha$			Число степеней свободы d.f.	$\alpha$		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,3138	12,706	63,657	18	1,7341	2,1009	2,8784
2	2,9200	4,3027	9,9248	19	1,7291	2,0930	2,8609
3	2,3534	3,1825	5,8409	20	1,7247	2,0860	2,8453
4	2,1318	2,7764	4,6041	21	1,7207	2,0796	2,8314
5	2,0150	2,5706	4,0321	22	1,7171	2,0739	2,8188
6	1,9432	2,4469	3,7074	23	1,7139	2,0687	2,8073
7	1,8946	2,3646	3,4995	24	1,7109	2,0639	2,7969
8	1,8595	2,3060	3,3554	25	1,7081	2,0595	2,7874
9	1,8331	2,2622	3,2498	26	1,7056	2,0555	2,7787
10	1,8125	2,2281	3,1693	27	1,7033	2,0518	2,7707
11	1,7959	2,2010	3,1058	28	1,7011	2,0484	2,7633
12	1,7823	2,1788	3,0545	29	1,6991	2,0452	2,7564
13	1,7709	2,1604	3,0123	30	1,6973	2,0423	2,7500
14	1,7613	2,1448	2,9768	40	1,6839	2,0211	2,7045
15	1,7530	2,1315	2,9467	60	1,6707	2,0003	2,6603
16	1,7459	2,1199	2,9208	120	1,6577	1,9799	2,6174
17	1,7396	2,1098	2,8982	$\infty$	1,6449	1,9600	2,5758

Составитель  
Агафонова Ольга Витальевна

**ЭКОНОМЕТРИКА**  
Методические указания по проведению практических занятий  
Часть 2

Авторская редакция  
Компьютерная верстка *О.В. Агафонова*

Подписано в печать \_\_\_\_\_ 2015 г. Формат 60х84/16.  
Объем 1,9 усл. печ. л. Тираж \_\_\_\_\_ экз.  
Изд. № \_\_\_\_\_ Заказ № \_\_\_\_\_.

Отпечатано в мини-типографии Экономического факультета НГАУ  
630039, Новосибирск, ул. Добролюбова, 160